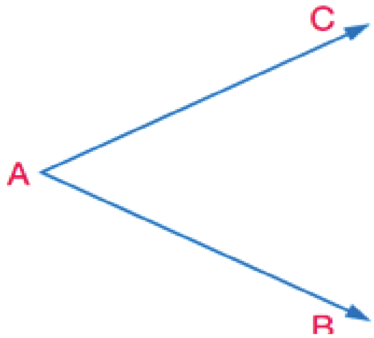
# DOĞRUDA VE ÜÇGENDE AÇILAR

## 7.1 DOĞRUDA AÇILAR

### 7.1.1 Açı

Başlangıç noktaları ortak iki farklı ışının birleşimine açı denir.




Şekilde [AC ve [AB ışınlarının oluşturduğu açı $\widehat{BAC}$

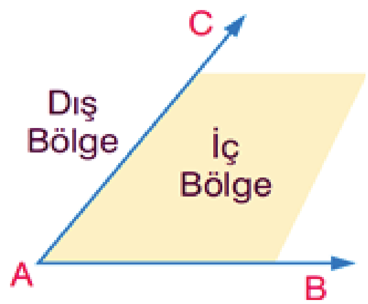
$\widehat{BAC}$ açısıdır.

$\widehat{BAC}$, olarak veya $\widehat{A}$ ile gösterilir. Ölçüsü ise, m($\widehat{BAC}$), m($\widehat{CAB}$) veya m($\widehat{A}$) şeklinde gösterilir.
[AB ve [AC ışınları açının kenarlarıdır

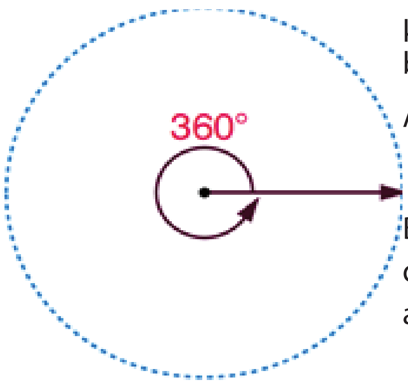
#### 7.1.1.1 Açının Düzlemde Ayırdığı Bölgeler

Bir aç ı düzlemi üç bölgeye ayırır.

Açının kendisi [AB ve [AC ışınları.
İç bölge (Taralı alan)
Dış Bölge




#### 7.1.1.2 Açı Ölçü Birimleri




Açı ölçüsü birimi olarak genelde derece kullanılır. Dereceden başka Grad ve Radyan birimleri de kullanılır.

Açı ölçüsü birimleri arasında,

$360° = 400$ G(grad) $= 2\pi$ (radyan) eşitliği vardır.

Bir ışının başlangıç noktası etrafında bir tur döndürülmesi ile elde edilen açı 360° dir. Derecenin alt birimleri dakika ve saniyedir.

1° = 60'(dakika)
1' = 60"(saniye)
1° = 3600" (saniye)

90 = 89 59' 60"

180 = 179 59' 60"

**ÖRNEK 1:**

37° 16' 34'' ile 14° 53'39'' nin toplamı ve farkı kaçtır?

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{array}{rl} & 37° \ 16' \ 34'' \\ + & 14° \ 53' \ 39'' \\ \hline & 52° \ 10' \ 13'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 37° \ 16' \ 34'' \\ - & 14° \ 53' \ 39'' \\ \hline & 22° \ 22' \ 55'' \end{array}$$

Bir saat kadranı üzerinde;

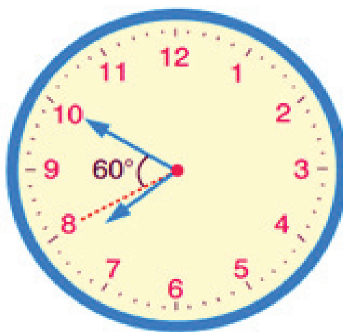
*Akrep, saatte 30° lik yol alır. (dakikada yarım derecelik yol alır)*

*Yelkovan, saatte 360° lik yol alır. (dakikada 6 derecelik yol alır)*

**ÖRNEK 2:**

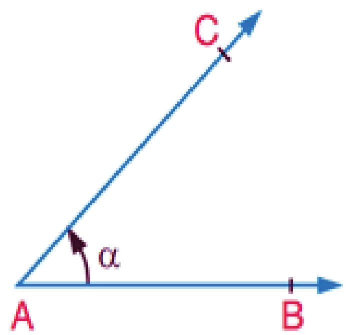
Saat 8' e 10 kala akrep ile yelkovan arasındaki küçük açının ölçüsü kaç derecedir?

**ÇÖZÜM:**




Akrebin tam 8'in üzerinde olduğunu varsayalım. Bu durumda akreple yelkovanın arasındaki açı 60° olurdu. Ancak akrep 10 dakika sonra 8'in üzerine geleceğinden henüz 5° geridedir. O halde 8' e 10 kala akrep ile yelkovan arasındaki açının ölçüsü; 60° + 5° = 65° bulunur.

### 7.1.1.3 Ölçülerine Göre Açılar




Dar Açı

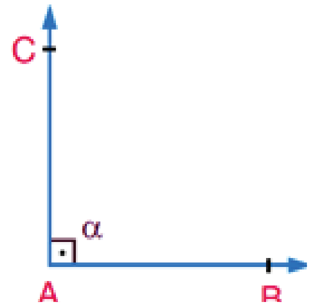
Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara denir.

$0° < \alpha < 90°$

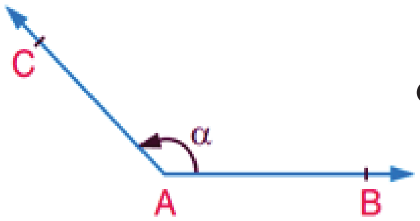
## Dik Açı

Ölçüsü 90° olan açıya denir.

$\alpha = 90°$



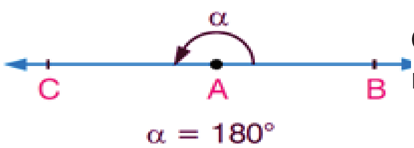

## Geniş Açı




Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açılara denir.

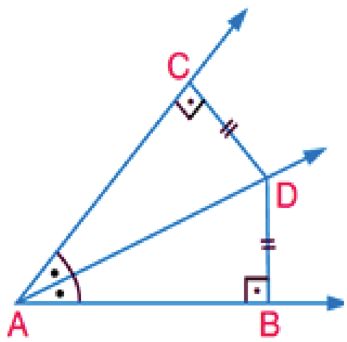
$90° < \alpha < 180°$

## Doğru Açı




Ölçüsü 180° olan açıdır. C, A, B noktaları doğrusal noktalardır.

### 7.1.1.4 Açıortay




Açıyı iki eşit parçaya bölen ışına açıortay denir.

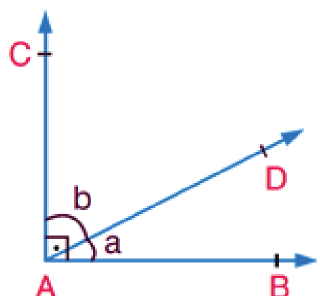
[AD, $\widehat{CAB}$ açısının açıortayıdır.

Açıortay üzerinde olan herhangi bir noktanın açının kenarlarına olan dik uzaklıkları eşittir.

[DC] ⊥ [AC ve [DB] ⊥ [AB ise

|CD| = |BD| ve |AC| = |AB| olur.

### 7.1.1.5 Tümler Açı



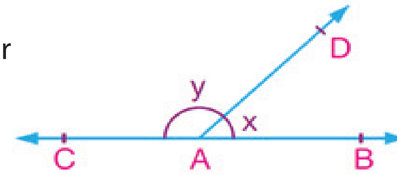

Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya tümler açılar denir.

$a + b = 90°$ dir

### 7.1.1.6 Bütünler Açı

Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya bütünler açılar denir.

$x + y = 180°$ dir.



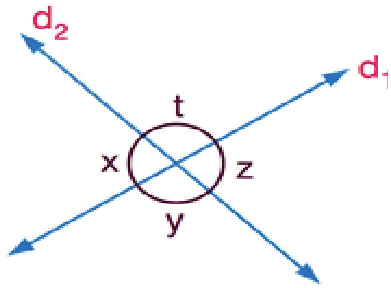

### 7.1.1.7 Ters Açılar

Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayanlara ters açılar denir.

*Ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.*

x ile z
t ile y

Ters Açılardır




$m(\widehat{x}) = m(\widehat{z})$ ve

$m(\widehat{t}) = m(\widehat{y})$ dir.

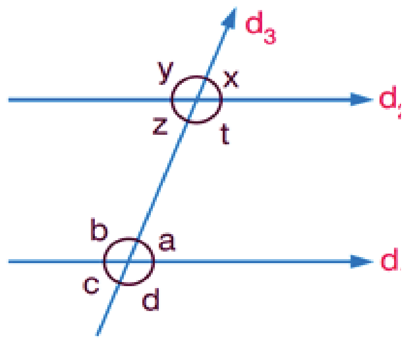
### Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

#### Yöndeş Açılar

d1 // d2 ise

a ile x
b ile y
c ile z
d ile t

Yöndeş açılardır



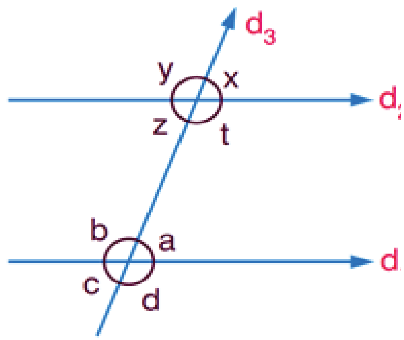

*Yöndeş açıların ölçüleri birbirine eşittir.*

#### İç Ters Açılar

d1 // d2 ise

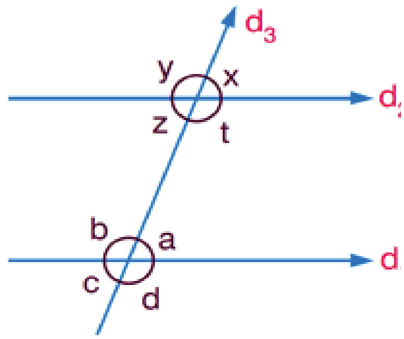
a ile z
b ile t

İçters açılardır



*İç ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.*

## Dış Ters Açılar

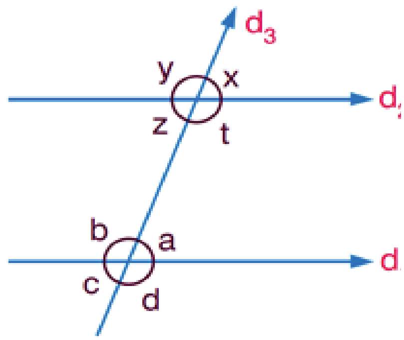



d1 // d2 ise

c ile x
d ile y
} Dışters açılardır

*Dış ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.*

## Karşı Durumlu Açılar




d1 // d2 ise

a ile t
b ile z
} Karşı durumlu açılar

Karşı durumlu açıların ölçüleri toplamı 180° dir.

$m(\hat{a}) + m(\hat{t}) = 180°$ ; $m(\hat{b}) + m(\hat{z}) = 180°$

*Paralel doğrular arasında birden fazla kesenin olduğu durumlarda kesişim noktalarından yeni paraleller çizilir.*

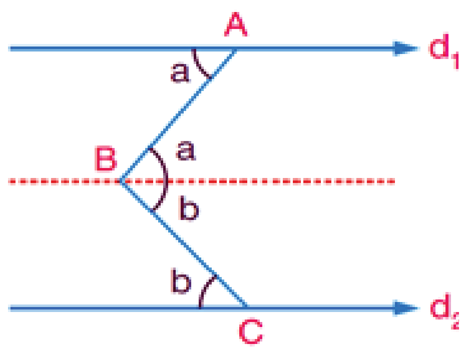
## Birden Fazla Kesenli Durumlar

d1 // d2 ise

B noktasından d1 ve d2 doğrularına paralel çizersek

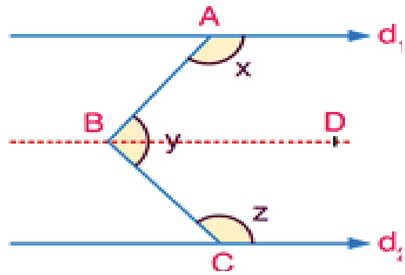
$m(\widehat{ABC})$= a+b olur.

$m(\widehat{ABD}) + x = 180°$
$m(\widehat{DBC}) + z = 180°$



Buradan

x + y + z = 360° dir.

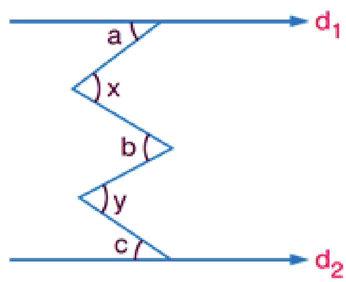



## Paralel Doğrular Arasındaki Ardışık Zıt Yönlü Açılar

d1 // d2 ise

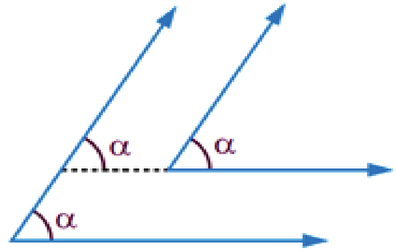
a + b + c = x + y olur.

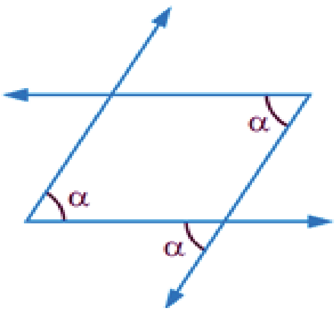
Bu tür soruları paraleller çizerek de çözebiliriz.




## Kolları Paralel ve Kolları Dik Açılar

Açıları oluşturan ışınlar aynı yönde ve paralel ise bu iki açının ölçüsü eşittir.

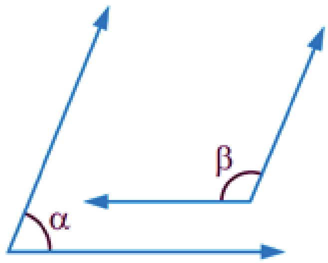


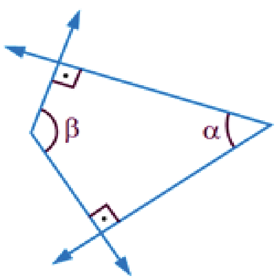




Açıları oluşturan ışınlar zıt yönlü ve paralel ise bu iki açının ölçüsü eşittir.

Açıları oluşturan ışınlardan biri aynı diğeri zıt yönlü ve paralel ise bu iki açının ölçüleri toplamı

$\alpha + \beta = 180°$ olur.

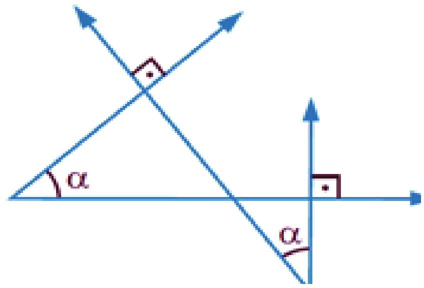


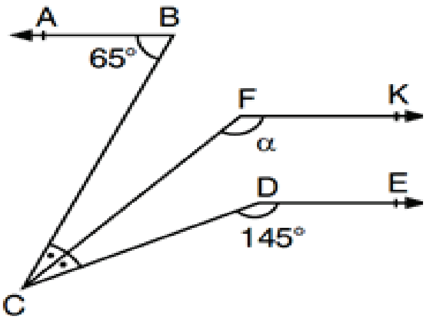

Kenarları birbirine dik karşılıklı iki açının ölçüleri toplamı

$\alpha + \beta = 180°$ olur.

Kenarları birbirine dik şekildeki açıların ölçüleri eşittir.




## ÖRNEK 3:




[BA // [FK // [DE

[CF açıortay

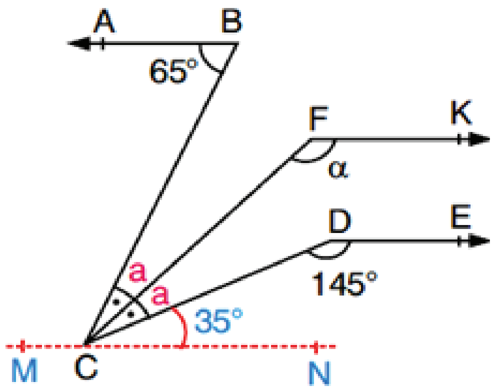
$m(\widehat{ABC}) = 65°$

$m(\widehat{CDE}) = 145°$

$m(\widehat{CFK}) = \alpha$

**Yukarıdaki verilere göre, α kaç derecedir?**

## ÇÖZÜM:




MN paralelini çizersek

$m(\widehat{DCN}) + 145° = 180°$

(karşı durumlu açılar)

$m(\widehat{DCN}) = 35°$ olur.

$m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{FCD}) = a$

dersek iç ters açılardan

$m(\widehat{BCN}) = m(\widehat{ABC})$ olacağından

$2a + 35° = 65° \Rightarrow a = 15°$ olur.

Karşı durumlu açılardan; $m(\widehat{FCN}) + \alpha = 180°$

$50° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 130°$ bulunur.

## ÖRNEK:

Bütünleri tümlerinin 5 katından 10° fazla olan açının ölçüsü kaç derecedir?

## ÇÖZÜM:

İstenen açıya x diyelim. x açısının bütünleri, 180° – x ve x açısının tümleri, 90°
x olur.

Bütünleri tümlerinin 5 katından 10° fazla olduğuna göre,

$180° - x = 5 \cdot (90° - x) + 10°$

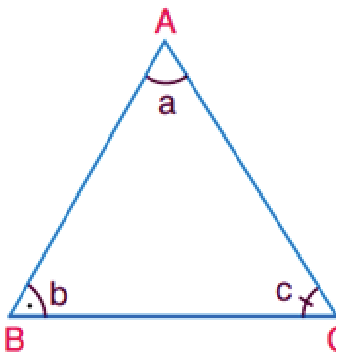
$180° - x = 450° - 5x + 10°$

$4x = 280°$

$x = 70°$ bulunur.

## 7.2 ÜÇGENDE AÇILAR

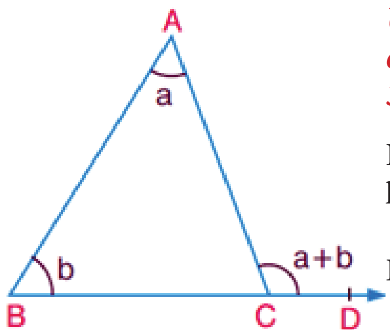
### 7.2.1 Üçgende Açı Özellikleri




*Üçgende iç açıların ölçüleri toplamı 180° dir.*

$a + b + c = 180°$ veya

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ dir.




*Üçgende dış açıların ölçüleri toplamı 360° dir.*

Herhangi bir köşeye ait dış açı, o köşenin iç açısının komşu ve bütünleri olan açıdır.

Bu durumda, $a' + b' + c' = 360°$

veya

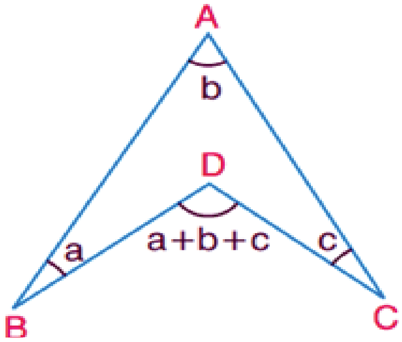
$m(\widehat{DAF}) + m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{ECF}) = 360°$ dir.

*Üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.*

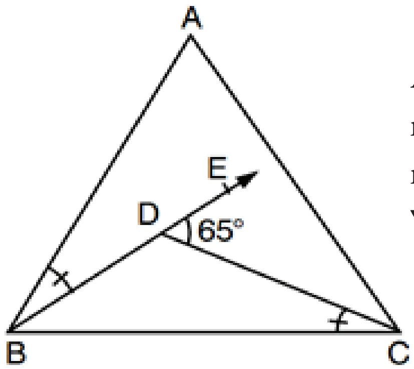
$m(\widehat{ACD}) = a + b$ dir.

a, b, c bulundukları açıların ölçüleri ise,

m(BDC) = a + b + c dir.




## ÖRNEK 4:



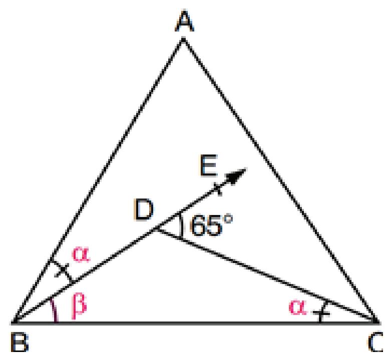

ABC bir üçgen

m(ABE) = m(DCB)

m(EDC) = 65°

**Yukarıdaki verilere göre, m(ABC) kaç derecedir?**

## ÇÖZÜM:




m(ABE) = m(DCB) = $\alpha$

m(EBC) = $\beta$ dersek

DBC üçgeninde

EDC dış açısı;

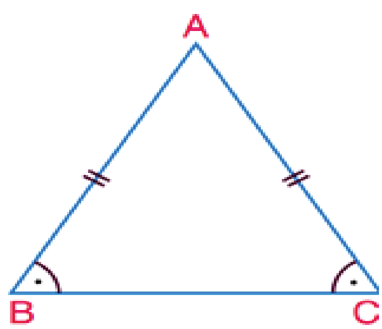
m(EDC) = 65° = $\alpha + \beta$

olur.

O halde, m(ABC) = $\alpha + \beta$ = 65° bulunur.

## 7.2.2 İkizkenar Üçgende Açılar

İki kenarı eş olan üçgene ikizkenar üçgen denir.



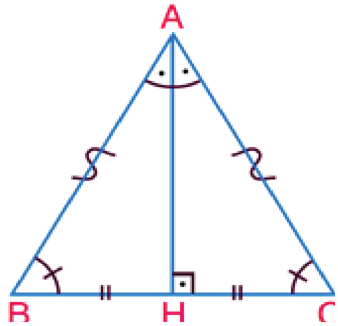

ABC üçgeninde

$|AB|=|AC| \Leftrightarrow m(\hat{B})=m(\hat{C})$

olur.

Burada A açısına ikizkenar üçgenin tepe açısı, [BC] kenarına ise tabanı denir.

İkizkenar üçgenin tepe açısından tabanına çizilen yükseklik, hem açıortay, hem de kenarortaydır.



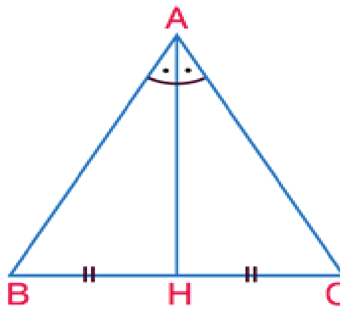

Bir üçgende, açıortay aynı zamanda yükseklik ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.

$|AB| = |AC|$

$|BH| = |HC|$ ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.

Bir üçgende, açıortay aynı zamanda kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.

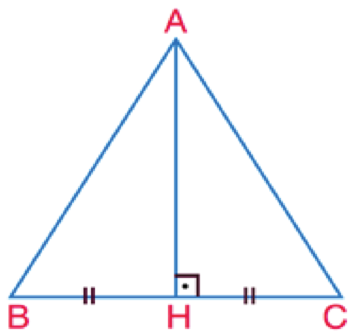



$|AB| = |AC|$,

$[AH] \perp [BC]$ ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.

Bir üçgende, yükseklik aynı zamanda kenarortay ise bu üçgen ikizkenar üçgendir.




$|AB| = |AC|$

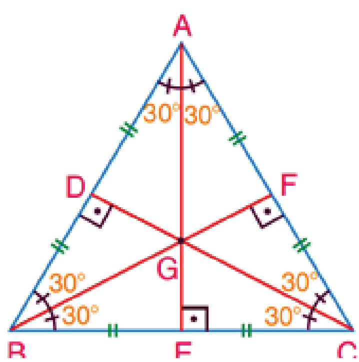
$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$ ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ olur.

İkizkenar üçgende açıortay, kenarortay ve yüksekliğin aynı olması birçok yerde karşımıza çıktığından çok iyi bilinmesi gereken bir özelliktir.

## 7.2.3 Eşkenar Üçgende Açılar

Üç kenarı eş olan üçgene eşkenar üçgen denir.




ABC üçgeninde

$|AB| = |BC| = |AC|$

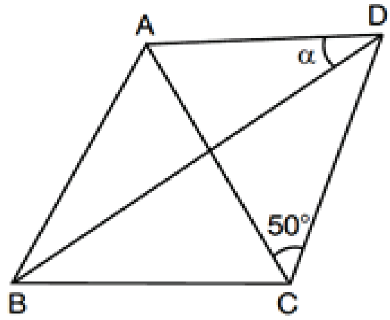
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$

Eşkenar üçgen, ikizkenar üçgenin bütün özelliklerini taşır. Eşkenar üçgende bütün açıortay, kenarortay yükseklikler çakışık ve hepsinin uzunlukları eşittir.

$|AE| = |BF| = |CD|$

Açıortay, kenarortay ve yüksekliklerin kesişim noktası eşkenar üçgenin hem ağırlık merkezi, hem çevrel çemberinin merkezi, hem de iç teğet çemberinin merkezidir.

**ÖRNEK 5:**



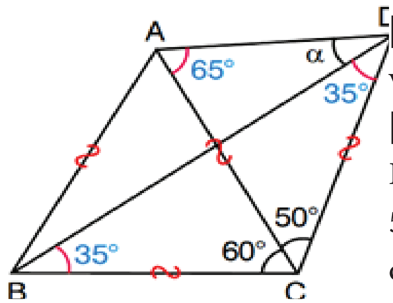

ABC eşkenar üçgen

$|CD| = |AB|$

$m(\widehat{ACD}) = 50°$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ADB}) = \alpha$ kaç derecedir?

**ÇÖZÜM:**




$|CD|$ uzunluğu eşkenar üçgenin bir kenarına eşit verildiğinden,

$|CD| = |CB| = |CA|$ olur.

BCD ikizkenar üçgen ve tepe açısı;

$50° + 60° = 110°$

olduğundan taban açılarının her biri;

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) = 35°$ olur.

Aynı şekilde, CAD ikizkenar üçgen ve tepe açısı 50° olduğundan taban açılarının her biri;

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CDA}) = 65°$ olur.

O halde, $m(\widehat{ADB}) = \alpha = 65° - 35°$

$\alpha = 30°$ bulunur.

## 7.2.4 Üçgende Açıortayların Oluşturduğu Açılar

İki İç Açıortayın Kesişmesiyle oluşan açı;

$$x = 90 + \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

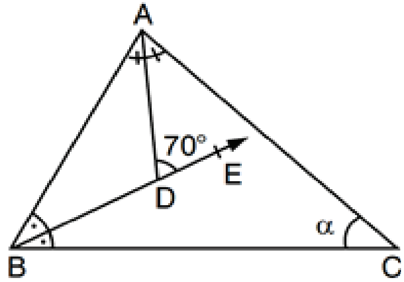
## ÖRNEK 6:

ABC bir üçgen

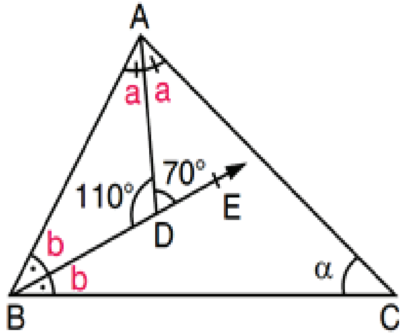
[AD] ve [BE açıortay

m($\widehat{ADE}$) = 70°

**Yukarıdaki verilere göre, m($\widehat{ACB}$) = α kaç derecedir?**




## ÇÖZÜM:




m($\widehat{BAD}$) = α m($\widehat{DAC}$) = α ve

m($\widehat{ABD}$) = m(DBC) = b

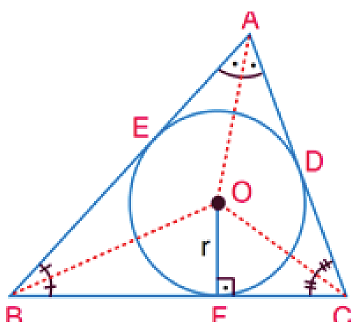
dersek, ABD üçgeninde iki iç açının toplamının bir dış açıya eşitliğinden, a + b = 70° olur.

ABC üçgeninin iç açılar toplamından

2a + 2b + α = 180° ➡ α = 180° – 2(a + b)

α = 180° – 140° ➡ α = 40° bulunur.

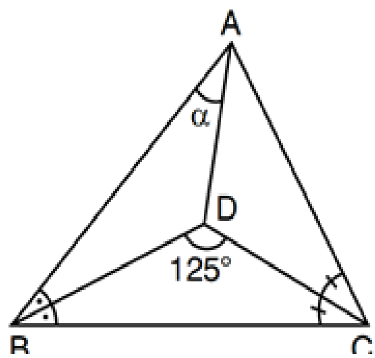
*Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişirler. Bu nokta içteğet çemberin merkezidir.*




Açıortayların kesiştiği noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları iç teğet çemberin yarıçapına eşittir.

Bir üçgende iki köşenin açıortayının kesişim noktası ile üçüncü köşe birleştirildiğinde o da açıortay olur.

## ÖRNEK 7:




ABC bir üçgen

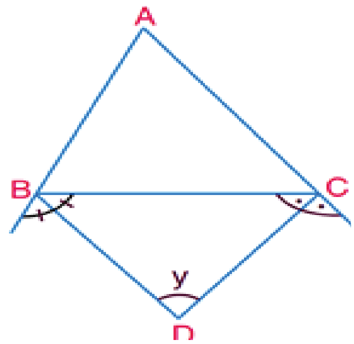
[BD] ve [CD] açıortay

m($\widehat{BDC}$) = 125°

Yukarıdaki verilere göre, m($\widehat{BAD}$) =α kaç derecedir?

## ÇÖZÜM:

[BD] ve [CD] açıortay ise [AD] de açıortay olmak zorundadır. O halde $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$ dır.

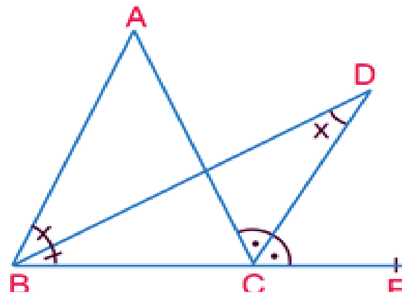



$m(\widehat{BDC}) = 125° = 90 + \dfrac{2\alpha}{2}$

Buradan $\alpha = 35°$ bulunur.

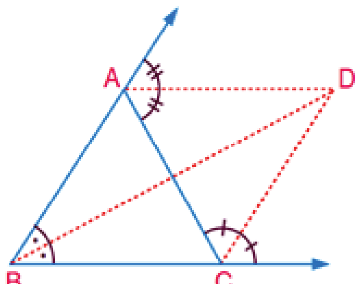
İki dış açıortayın kesişmesiyle oluşan açı;

$$y = 90 - \frac{m(\hat{A})}{2}$$




Bir iç açıortay ile bir dış açıortayın kesişmesiyle oluşan açı,

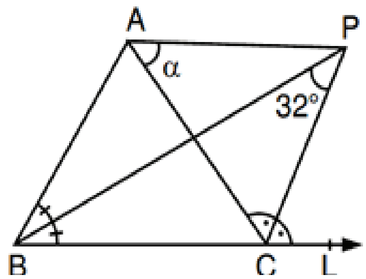
$$x = \frac{m(\hat{A})}{2}$$




Üçgende iki dış açıortay ile bir iç açıortay bir noktada kesişirler.

Şekildeki D noktası ABC üçgeninin [AC] kenarına ait dış teğet çemberinin merkezidir.

## ÖRNEK 7:



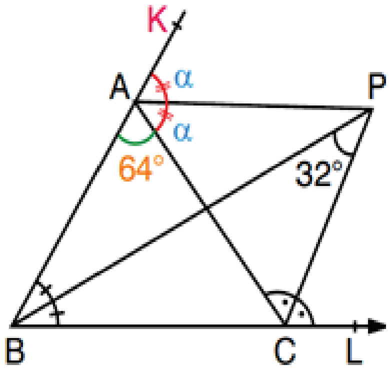

ABC bir üçgen
[CP] dış açıortay
[BP] iç açıortay

$m(\widehat{BPC}) = 32°$

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{PAC}) = \alpha$ kaç derecedir?

## ÇÖZÜM :

Bir iç açıortay ile bir dış açıortay arasındaki açı üçüncü açının yarısına eşit olacağından,



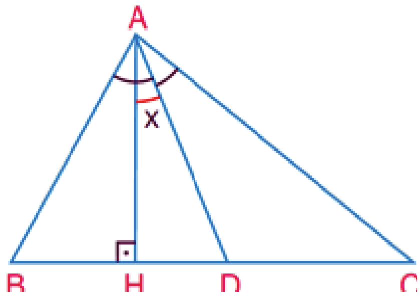

$m(\widehat{BAC}) = 2 \,.\, 32° = 64°$ olur.

P noktası bir iç açıortay ile bir dış açıortayın kesim noktası olduğundan [AP] doğru parçası da dış açıortay olur.

Yani, $m(\widehat{PAK}) = m(\widehat{PAC}) = \alpha$ dır.

$2\alpha + 64° = 180°$ ➡ $2\alpha = 116°$

$\alpha = 58°$ bulunur.



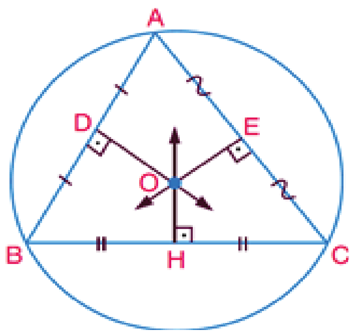

Açıortayla yükseklik arasında kalan açı;

$[AH] \perp [BC]$

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$

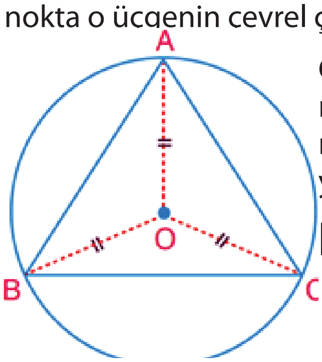
$m(\widehat{HAD}) = x$ dersek

$$x = \frac{|\, m(\widehat{A}) - m(\widehat{C}) \,|}{2}$$



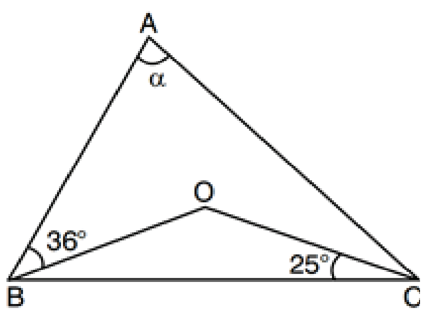

Çevrel çember

Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere o üçgenin çevrel çemberi denir. Bir üçgende üç kenarın orta noktalarından çizilen dikmeler bir noktada kesişir. Bu nokta o üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.




Çevrel çemberin merkezinin köşelere olan uzaklıkları birbirine eşittir. Bunlar aynı zamanda çevrel çemberin yarıçapına eşittir.

$|OA| = |AB| = |OC| = r$




**ÖRNEK 9:**

O çevrel çemberin merkezi

$m(\widehat{ABO}) = 36°$ $m(\widehat{BCO}) = 25°$

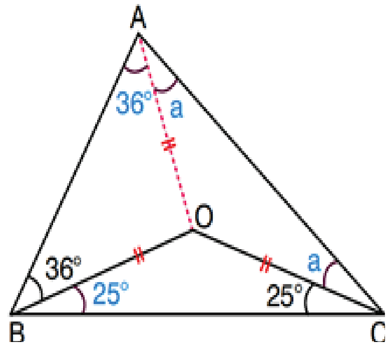
Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{A}) = \alpha$ kaç derecedir?

## ÇÖZÜM:

O çevrel çemberin merkezi olduğundan
$|OA| = |OB| = |OC|$ olur.

m($\widehat{OCB}$) = m($\widehat{OBC}$) = 25° ve

m($\widehat{OAB}$) = m($\widehat{OBA}$) = 36° olur.

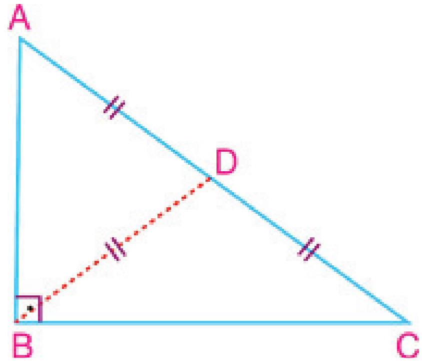



AOC ikizkenar üçgeninin taban açılarına **a** diyelim. ABC üçgeninin iç açıları toplamından;

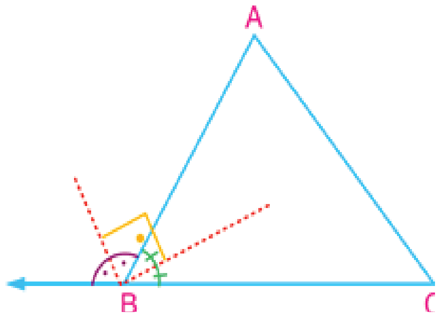
$25° + 25° + 36° + 36° + 2\mathbf{a} = 180°$

Buradan, **a** = 29° olur. O halde,

m($\widehat{BAC}$) = 36° + 29° = 65° bulunur.




Dik üçgenlerde hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün yarısına eşittir.




Üçgenin bir köşesine ait iç açıortay ile dış açıortay dik kesişir.

# ÖZET

## DOĞRUDA AÇILAR

### Açı

Başlangıç noktaları ortak iki farklı ışının birleşimine **açı** denir

### Açı Ölçü Birimleri

Açı ölçüsü birimi olarak genelde derece kullanılır. Dereceden başka Grad ve Radyan birimleri de kullanılır.

$360° = 400$ G(grad) $= 2\pi$ (radyan) eşitliği vardır.

## Ölçülerine Göre Açılar

### Dar Açı
Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara denir.

### Dik Açı
Ölçüsü 90° olan açıya denir.

### Geniş Açı
Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açılara denir.

### Doğru Açı
Ölçüsü 180° olan açıdır.

### Açıortay
Açıyı iki eşit parçaya bölen ışına açıortay denir

### Tümler Açı
Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya tümler açılar denir.

### Bütünler Açı
Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya bütünler açılar denir.

### Ters Açılar
Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayanlara ters açılar denir.

## ÜÇGENDE AÇILAR

### Üçgende Açı Özellikleri

Üçgende iç açıların ölçüleri toplamı 180° dir.

Üçgende dış açıların ölçüleri toplamı 360° dir.
İki kenarı eş olan üçgene ikizkenar üçgen denir

Üç kenarı eş olan üçgene eşkenar üçgen denir.

Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişirler. Bu nokta içteğet çemberin merkezidir

## DEĞERLENDİRME SORULARI

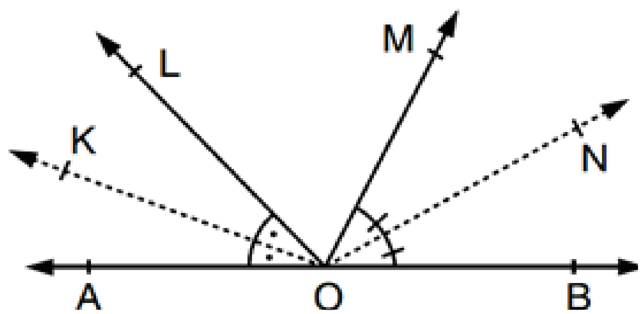
1) Bütünlerinin 2 katından 15° eksik olan açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 95 B) 105 C) 110 D) 115 E) 125

2) 7930''(saniye) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

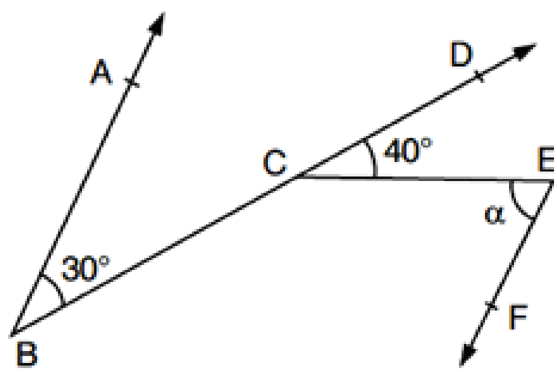
A) 2° 20' 10'' B) 2° 15' 10'' C) 2° 12' 30'' D) 2° 12' 20'' E) 2° 12' 10''

3) A, O, B doğrusal
[OK ve [ON açıortaylar
$m(\widehat{KOM}) = 80°$
$m(\widehat{LON}) = 85°$
Yukarıdaki verilere göre, LOM açısının ölçüsü kaç derecedir?




A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

4) [BA // [EF
m(ABD) = 30°
m(DCE) = 40°
Yukarıdaki verilere göre,
$m(\widehat{CEF}) = \alpha$ kaç derecedir?




A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

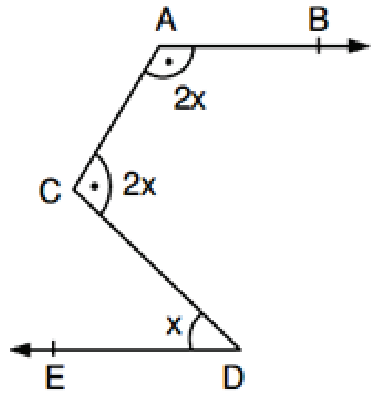
5) [AB // [DE

m($\widehat{BAC}$) = 2x

m($\widehat{ACD}$) = 2x

m($\widehat{CDE}$) = x

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?




A) 60 B) 55 C) 50 D) 45 E) 40

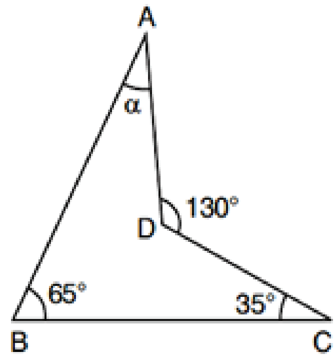
6) m($\widehat{ABC}$) = 65°

m($\widehat{BCD}$) = 35°

m($\widehat{ADC}$) = 130°

Yukarıdaki verilere göre,

m(BAD) = α kaç derecedir?




A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

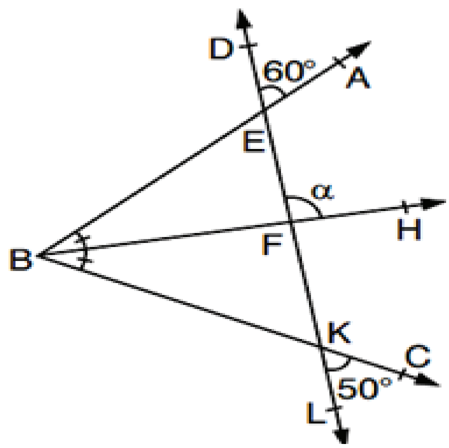
7) [BH, ABC açısının açıortayı

m(DEA) = 60°

m(CKL) = 50°

Yukarıdaki verilere göre,

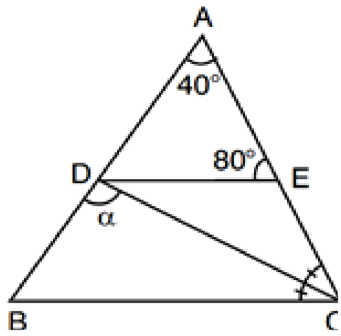
m(DFH) = α kaç derecedir?




A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 95

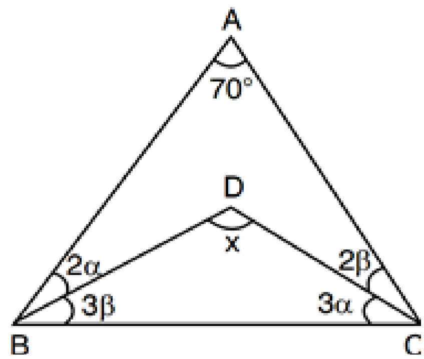
8) ABC bir üçgen

[DE] // [BC]
[CD] açıortay
m($\widehat{BAC}$) = 40°
m($\widehat{DEA}$) = 80°
Yukarıdaki verilere göre,
m($\widehat{BDC}$) = α kaç derecedir?



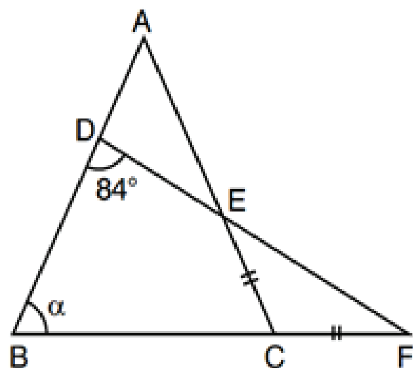

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

9) ABC bir üçgen
m($\widehat{BAC}$) = 70°
m($\widehat{ABD}$) = 2α
m($\widehat{DBC}$) = 3β
m($\widehat{DCB}$) = 3α
m($\widehat{ACD}$) = 2β
Yukarıdaki verilere göre,
m($\widehat{BDC}$) = x kaç derecedir?




A) 114 B) 116 C) 118 D) 120 E) 124

10) ABC ve DBF birer üçgen
|AB| = |AC|
|EC| = |CF|
m($\widehat{BDF}$) = 84°
Yukarıdaki verilere göre,
m($\widehat{ABC}$) = α kaç derecedir?




A) 58 B) 59 C) 62 D) 64 E) 66