9.Sınıf Matematik Kümelerde İşlemler Konu Anlatımı

Kümelerde Birleşim İşlemi

A ve B iki küme olsun. A ve B den en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin birleşim kümesi denir. A U B şeklinde yazılan bu küme "A birleşim B" diye okunur.

A u B kümesinin elemanları, A ya veya B ye veya A ve B nin her ikisine de ait olabilir. Buna göre;

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ dir.

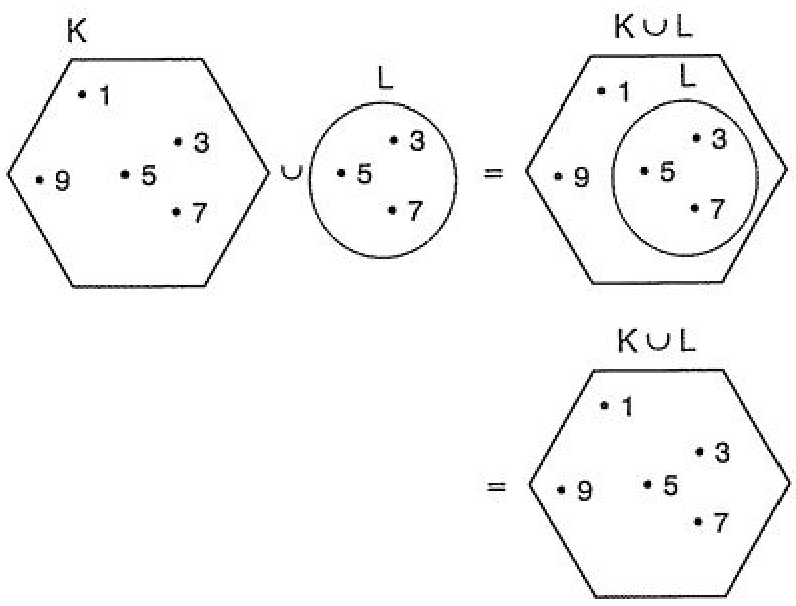
ÖRNEK 29

$K = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve

$L = \{3, 5, 7\}$

olmak üzere $K \cup L$ **kümesini bulalım.**

Çözüm



Burada, $K \cup L = \{1, 3, 5, 7, 9\} = K$ dir.

A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere;

a. A U A = A (tek kuvvet özelliği)

b. A U B = B U A (değişme özelliği)

c. A U (B U C) = (A U B) U C = A U B U C (birleşme özeliliği)

d . A U ∅ = A dır. (etkisiz eleman)

Kümelerde Kesişim İşlemi

A ve B iki küme olmak üzere, A ve B kümelerinden her ikisine de ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kesişimi (veya arakesiti) denir. Bu küme A n B şeklinde gösterilerek "A kesişim B" diye okunur.

Buna göre, kesişim kümesi;

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ dir.

www.supersoru.com

ÖRNEK 30

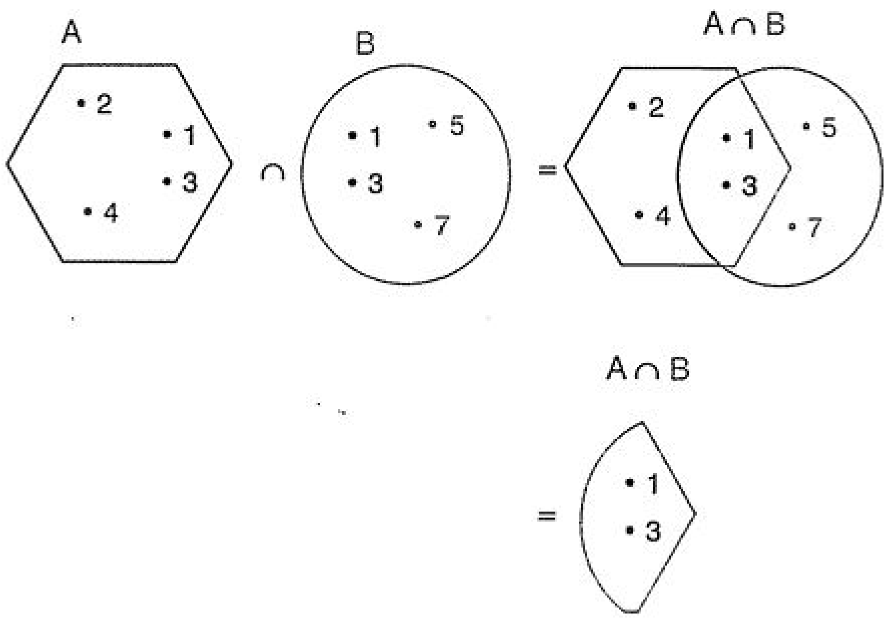
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5, 7\}$

olmak üzere, hem A kümesinde hem de B kümesinde olan elemanlar; 1 ile 3 tür. Buna göre, verilen kümelerin kesişimi

$A \cap B = \{1, 3\}$ olur.

A, B ve $A \cap B$ kümesinin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



A ve B iki küme olmak üzere,

$(A \cap B) \subset A$ ve $(A \cap B) \subset B$ dir.

ÖRNEK 31

$T = \{x \mid x \text{ pozitif sayı}\}$ ve

$K = \{x \mid x \text{ negatif sayı}\}$

olmak üzere $T \cap K$ kümesini bulalım.

Çözüm

Pozitif ve negatif sayıların kesişimi boş kümedir.

Burada, $T \cap K = \varnothing$ dir.

AYRIK KÜMELER

A ve B iki küme olmak üzere,

$A \cap B = \varnothing$ ise A ve B ayrık kümelerdir.

Ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir.

www.supersoru.com

A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere;

a. $A \cap A = A$ (tek kuvvet özelliği)

b. $A \cap B = B \cap A$ (değişme özelliği)

c. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (birleşme özelliği)

d. $A \cap \varnothing = \varnothing$ dir. (yutan eleman)

A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere,

a. $\cap$ işleminin $\cup$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b. $\cup$ işleminin $\cap$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

A ve B kümeleri için

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ dir.}$$

ÖRNEK 33

Fizikten veya matematikten geçenlerin bulunduğu 22 kişilik bir sınıfta 18 kişi fizikten, 12 kişi matematikten geçmiştir.

Bu sınıfta hem fizik hem de matematikten geçen kaç öğrenci vardır?

Çözüm

Fizikten geçenlerin kümesine F, matematikten geçenlerin kümesine M diyelim. Buradan,

$s(F) = 18$, $s(M) = 12$ ve $s(F \cup M) = 22$ olur.

$s(F \cup M) = s(F) + s(M) - s(F \cap M)$ olduğundan,

$22 = 18 + 12 - s(F \cap M)$

$s(F \cap M) = 8$ dir.

ÖRNEK 34

Bir sınıfta Almanca veya Fransızca dillerinden en az birini bilen 36 öğrenci vardır. Her iki dili bilenlerin sayısı; Almanca bilenlerin sayısının $\frac{1}{4}$ üne, Fransızca bilenlerin sayısının ise $\frac{1}{3}$ üne, eşittir. **Buna göre, sınıfta Almanca bilenlerin sayısı kaçtır?**

Çözüm

Almanca bilenlerin kümesi A, Fransızca bilenlerin kümesi F, her iki dili bilenlerin sayısı x olsun.

www.supersoru.com

$s(A \cap F) = x$

$s(A \cup F) = 36$

$s(A) = 4x$

$s(F) = 3x$ olur.

$s(A \cup F) = s(A) + s(F) - s(A \cap F)$

$36 = 4x + 3x - x$

$6 = x$ olur.

Öyleyse, $s(A) = 4 \cdot 6 = 24$ tür.

ÖRNEK 35

$A = \{x \mid x < 50,\ x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

$B = \{x \mid x < 70,\ x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

kümeleri için, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 38 B) 39 C) 45 D) 47 E) 49

Çözüm

$A = \{2, 4, \ldots, 46, 48\}$ ise $s(A) = \frac{48-2}{2} + 1 = 24$ tür.

$B = \{3, 6, \ldots, 66, 69\}$ ise $s(B) = \frac{69-3}{3} + 1 = 23$ tür.

$A \cap B = \{6, 12, \ldots, 42, 48\}$ ise $s(A \cap B) = \frac{48-6}{6} + 1 = 8$ dir.

Öyleyse, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$= 24 + 23 - 8$

$= 39$ olur.

Cevap B

Evrensel Küme

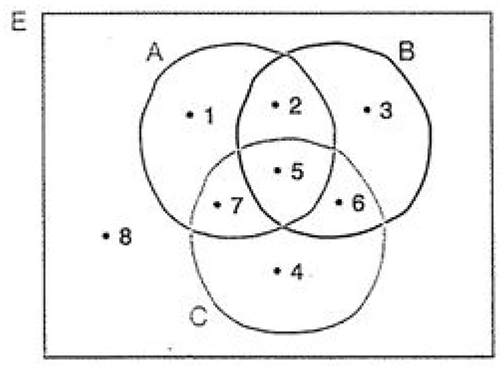
Üzerinde çalışılan bir konu veya problem için gerekli olan bütün elemanları kapsayacak biçimde seçilen kümeye evrensel küme denir ve E harfi ile gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, evrensel küme sabit veya tek değildir. Üzerinde çalışılan konunun türüne veya problemi çözen kişiye göre de değişebilir. Aynı problem için farklı evrensel kümeler de oluşturulabilir.

Seçilen evrensel küme, gerekli bütün elemanları kapsayacak kadar geniş, gereksiz bütün elemanları dışlayacak kadar dar olmalıdır. Bununla birlikte evrensel küme sonlu veya sonsuz olabilir.

www.supersoru.com

ÖRNEK 38



Yukarıdaki şemada evrensel küme dikdörtgen şeklinde gösterilmiştir. Buna göre,

$A \subset E$

$B \subset E$

$C \subset E$

$(A \cup B) \subset E$

$(A \cup C) \subset E$

$(B \cup C) \subset E$

$(A \cup B \cup C) \subset E$ olduğu görülmektedir.

E evrensel kümesinin bir alt kümesi A kümesi olsun.

a. $A \subset E$

b. $A \cap E = A$

c. $A \cup E = E$ dir.

ÖRNEK 39

E evrensel kümesi içinde bir A kümesi olsun. Buna göre,

$$\{[(A \cap E) \cap (E \cup A)] \cap E\} \cap A$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

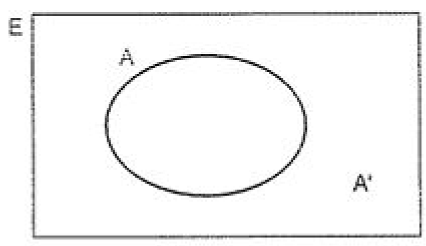
$$\begin{aligned}\{[(A \cap E) \cap (E \cup A)] \cap E\} \cap A &= [(A \cap E) \cap E] \cap A \\ &= (A \cap E) \cap A \\ &= A \cap A \\ &= A \text{ dır.}\end{aligned}$$

Tümleme İşlemi

E evrensel kümesi içinde bir A kümesi olsun. E de olup A da olmayan elemanların kümesine A nin tümleyeni denir.

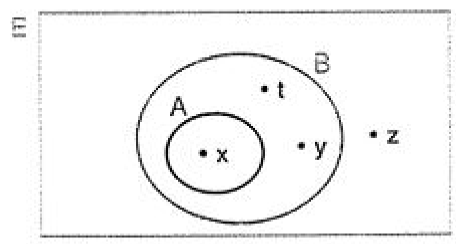
$A \subset E$ olmak üzere A kümesinin tümleyeni;

$A' = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$ dır.



Yukarıdaki şekilde taralı alanı E evrensel kümesindeki A kümesinin tümleyeni olan A' kümesini belirtmektedir.

ÖRNEK 40



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre,

$E = \{x, y, t, z\}$

$A' = \{t, y, z\}$

$B' = \{z\}$ dir.

ÖRNEK 41

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

evrensel kümesinde

$A = \{x \mid x \text{ tek sayı}\}$

$B = \{x \mid x \text{ çift sayı}\}$

$C = \{x \mid x \text{ asal sayı}\}$

kümeleri veriliyor.

Bu durumda, A', B' ve C' kümelerini liste yöntemi ile yazalım.

Çözüm

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ evrensel kümesinde

$A = \{x \mid x \text{ tek sayı}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{x \mid x \text{ çift sayı}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{x \mid x \text{ asal sayı}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$C' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

ÖRNEK 42

E evrensel kümesi içinde bir A kümesi olsun. Buna göre,

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

kümesinin farklı evrensel kümeler için tümleyenini bulalım:

$E = \{0, 1, 2, ..., 98, 99\}$ ise $A' = \{10, 11, 12, \ldots, 98, 99\}$,

$E = \mathbb{N}$ ise $A' = \{10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$,

$E = \mathbb{Z}$ ise $A' = \{\ldots, -3, -2, -1, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$

$E = \{x \mid x \text{ rakamdır}\}$ ise $A' = \varnothing$ olur.

E evrensel kümesi içindeki A ve B kümeleri verilsin.

a. $(A')' = A$

b. $A \cap A' = \varnothing$

c. $A \cup A' = E$

d. $\varnothing' = E$

e. $E' = \varnothing$

f. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

www.supersoru.com

ÖRNEK 43

Evrensel küme E olmak üzere,

$$[(A' \cup A) \cap A] \cap [(A \cap A') \cup A]' = (E \cap A) \cap (\varnothing \cup A)'$$
$$= A \cap A'$$
$$= \varnothing \text{ dir.}$$

ÖRNEK 44

Evrensel küme E olmak üzere,

$$[(\varnothing \cap A) \cup A] \cup [A \cup (A \cup A')] = (\varnothing \cup A) \cup (A \cup E)$$
$$= A \cup E$$
$$= E \text{ dir.}$$

A ve B aynı evrensel kümeye ait iki küme olmak üzere,

a. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

b. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dir.

ÖRNEK 45

$$[A' \cup (B \cap A)]' = (A')' \cap (B \cap A)'$$
$$= A \cap (B' \cup A')$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap A')$$
$$= (A \cap B') \cup \varnothing$$
$$= A \cap B'$$

ÖRNEK 46

$$[(A' \cap B') \cup A]'$$

ifadesini sadeleştirelim.

Çözüm

$$[(A' \cap B') \cup A]' = (A' \cap B')' \cap A'$$
$$= (A \cup B) \cap A'$$
$$= (A \cap A') \cup (B \cap A')$$
$$= \varnothing \cup (B \cap A')$$
$$= B \cap A'$$

ÖRNEK 47

A', B' ve B kümelerinin alt küme sayısı sırasıyla 16, 128 ve 512 olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

$s(A') = x$, $s(B') = y$ ve $s(B) = z$ olsun.

$2^x = 16$ ise $2^x = 2^4$

ise $x = 4$ tür.

$2^y = 128$ ise $2^y = 2^7$

ise $y = 7$ dir.

$2^z = 512$ ise $2^z = 2^9$

ise $z = 9$ dur.

www.supersoru.com

$s(A) + s(A') = s(B) + s(B') = s(E)$

$s(A) + 4 = 9 + 7$

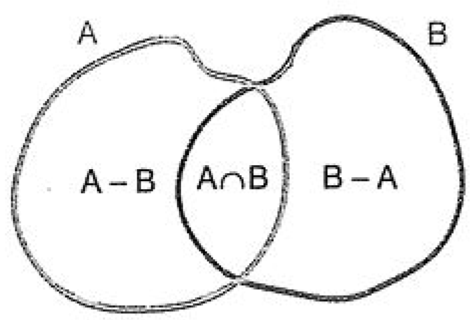
$s(A) = 12$ bulunur.

İki Kümenin Farkı

A ve B iki küme olsun. A da olup B de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B kümesi denir.

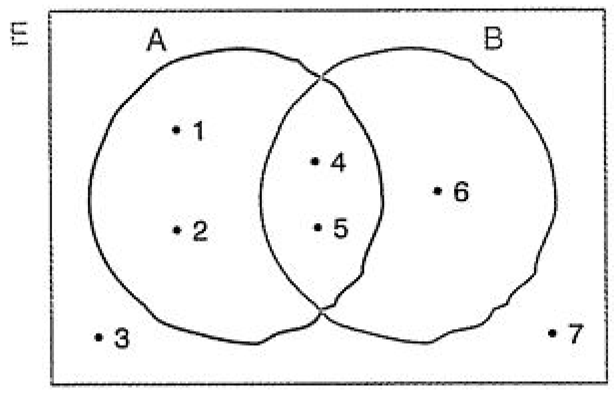
Bu küme A \ B ya da A - B şeklinde gösterilir ve

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ dir.



Yukarıdaki şekilden $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ olduğu görülmektedir.

ÖRNEK 48



Yukarıdaki şemada E evrensel kümesine ait A ve B kümeleri verilmiştir. Buna göre, $A - B$, $B - A$, $E - A$, $(A \cup B) - (A \cap B)$ ve $B' - A$ kümelerini bulalım.

Çözüm

Verilenlere göre,

$A - B = \{1, 2\}$

$B - A = \{6\}$

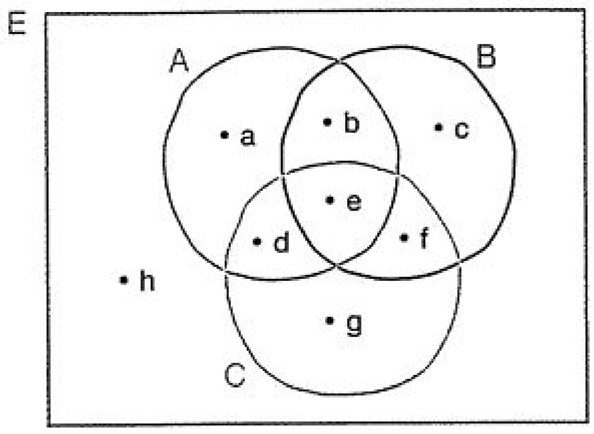
$E - A = \{3, 6, 7\}$

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 6\}$

$B' - A = \{3, 7\}$ olur.

www.supersoru.com

ÖRNEK 49



Yukarıdaki şemada E evrensel kümesine ait A, B, C kümeleri verilmiştir. Buna göre,

$A - B = \{a, d\}$

$B - A = \{c, f\}$ ($A - B \neq B - A$ olduğuna dikkat ediniz.)

$B - C = \{b, c\}$

$A - C = \{a, b\}$

$B - B = \varnothing$

$E - A = \{c, f, g, h\} = A'$

$(A \cup B) - C = \{a, b, c\}$ olduğu görülmektedir.

E, evrensel kümesinin alt kümelerinden ikisi A ve B kümeleri olmak üzere,

a. $A \neq B$ ise $A - B \neq B - A$ dır.

b. $A \cap B = \varnothing$ ise $(A - B = A$ ve $B - A = B)$ dir.

c. $A \subset B$ ise, $A - B = \varnothing$ dir.

d. $A - A = \varnothing$

e. $A - \varnothing = A$

f. $\varnothing - A = \varnothing$

g. $A - E = \varnothing$

h. $E - A = A'$

i. $s(A \cup B) = s(A) + s(B - A)$

$s(A \cup B) = s(B) + s(A - B)$

ÖRNEK 50

$s(B) = 9$

$s(A - B) = 5$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

$s(A \cup B) = s(B) + s(A - B)$

$= 9 + 5$

$= 14$ tür.

www.supersoru.com

ÖRNEK 51

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $(A \cup B) - (A - B) = B$

b. $A \cap (B - A) = \varnothing$

Çözüm

a. $(A \cup B) - (A - B) = (A \cup B) \cap (A - B)'$

$= (A \cup B) \cap (A \cap B')'$

$= (A \cup B) \cap (A' \cup B)$

$= (A \cap A') \cup B$

$= \varnothing \cup B$

$= B$

b. $A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A')$

$= B \cap (A \cap A')$

$= B \cap \varnothing$

$= \varnothing$

ÖRNEK 52

E, evrensel kümesinin alt kümelerinden ikisi A ve B kümeleri olmak üzere,

$s(A) = 5$

$s(E) = 17$

olduğuna göre, $s[(B - A) \cup (B' - A)]$ kaçtır?

Çözüm

$s[(B - A) \cup (B' - A)] = s[(B \cap A') \cup (B' \cap A')]$

$= s[(B \cup B') \cap A']$

$= s[E \cap A']$

$= s(A')$ olur, ... (✣)

$s(A) + s(A') = s(E)$ ... (✣✣)

$5 + s(A') = 17$

$s(A') = 12$ dir.

Kümelerle İlgili Problemler

Kümelerle ilgili özellikleri gördük. Şimdi de bu özellikleri kullanarak çözebileceğimiz problemleri inceleyeceğiz.

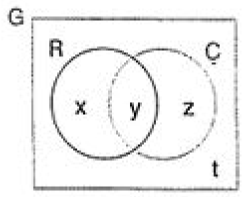
ÖRNEK 53

Bir grupta; Rusça veya Çince dillerinden; sadece birini bilen 20, en az birini bilen 32 ve en çok birini bilen 21 kişi vardır.

Buna göre, bu grupta kaç kişi vardır?

Çözüm :

www.supersoru.com



Grupta, Rusça bilenlerin kümesi R, Çince bilenlerin kümesi Ç olsun.

Sadece bir dil bilenlerin sayısı,

$x + z = 20$ dir. ... (1)

En az bir dil bilenlerin sayısı,

$x + y + z = 32$ ... (2)

En çok bir dil bilenlerin sayısı,

$x + z + t = 21$ dir. ... (3)

(1) ile (3) ten,

($x + z = 20$ ve $x + z + t = 21$) ise,

$20 + t = 21$ ise $t = 1$ olur. ... (4)

(2) ile (4) ten bu grup

$x + y + z + t = 32 + 1 = 33$ kişidir.

ÖRNEK 54

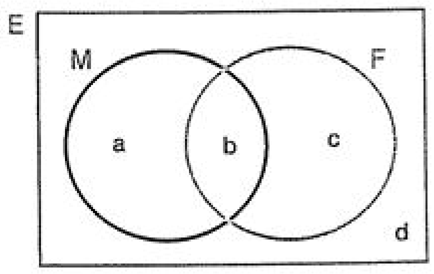
30 kişilik bir sınıfta matematikten geçen 16 kişi, fizikten kalan 15 kişidir. Her iki dersten de kalan 6 kişi olduğuna göre,

a. yalnız fizikten geçenlerin sayısını bulalım.

b. yalnız bir dersten geçenlerin sayısını bulalım.

c. her iki dersten geçenlerin sayısını bulalım.

Çözüm :



Matematikten geçenlerin kümesi M, fizikten geçenlerin kümesi F, tüm sınıfın kümesi E olsun. a, b, c, d harfleri de bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir. Verilenlere göre,

a. Yalnız fizikten geçenlerin sayısı : $s(F - M)$

$s(M) + s(F - M) + s(M' \cap F') = s(E)$

$16 + c + 6 = 30$

$c = 8$ dir.

www.supersoru.com

b. Yalnız bir dersten geçenlerin sayısı : $s(F-M) + s(M-F)$

$s(F) = s(E) - s(F')$

$s(F) = 30 - 15 = 15$ tir.

$s(F) + s(M-F) + s(M' \cap F') = s(E)$

$15 + a + 6 = 30$

$a = 9$ dur.

Buna göre, $s(F-M) + s(M-F) = 8 + 9 = 17$ dir.

c. Her iki dersten geçenlerin sayısı : $s(M \cap F)$

$s(M-F) + s(M \cap F) + s(F-M) + s(M' \cap F') = s(E)$

$9 + b + 8 + 6 = 30$

$b = 7$ dir.

ÖRNEK 55

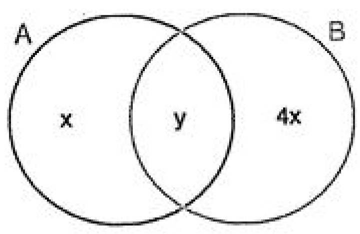
Kesişimleri boş küme olmayan A ve B kümeleri için,

$s(B) = 3 \cdot s(A)$

$s(B-A) = 4 \cdot s(A-B)$

olduğuna göre, B kümesi <u>en az</u> kaç elemanlıdır?

Çözüm



$s(A-B) = x$ ise $s(B-A) = 4x$ tir.

$s(A \cap B) = y$ olsun. Buna göre,

$s(B) = 3 \cdot s(A)$ ise

$4x + y = 3(x + y)$

$4x + y = 3x + 3y$

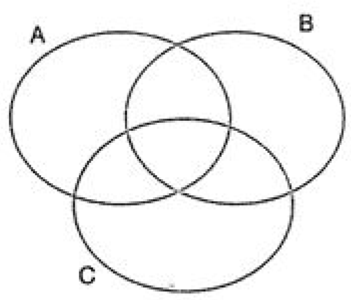
$x = 2y$ dir.

$y \neq 0$ olduğundan y en az 1 olur.

$y = 1$ ise $x = 2$ ve

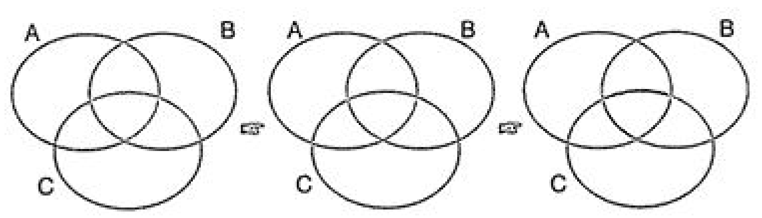
$s(B) = 4x + y = 8 + 1 = 9$ olur.

ÖRNEK 56



Yukarıdaki şemadaki taralı bölgeyi küme işlemlerini kullanarak ifade edelim.

Çözüm

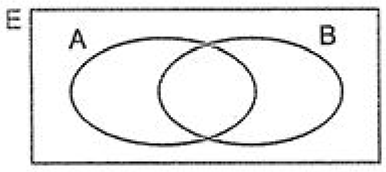


$B \cap (A \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B \cap C)$ $\quad$ $[B \cap (A \cup C)] - (A \cap B \cap C)$

$B \cap (A \cup C)$ kümesinden $(A \cap B \cap C)$ kümesi çıkarılırsa şemada verilen taralı bölge olan $[B \cap (A \cup C)] - (A \cap B \cap C)$ kümesi elde edilir.

www.supersoru.com

ÖRNEK 57



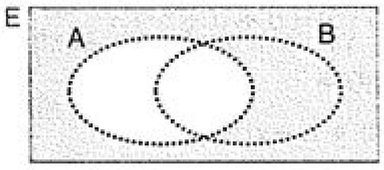
Yukarıdaki şemayı kullanarak aşağıdaki kümeleri boyayarak gösterelim.

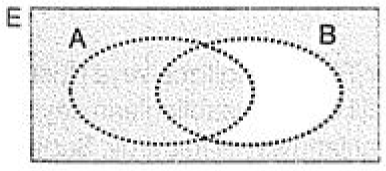
a. $E - A$

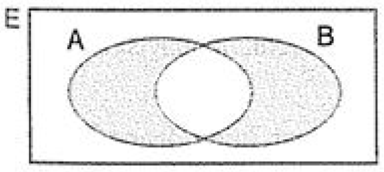
b. $B' \cup (A \cap B)$

c. $(A - B) \cup (B - A)$

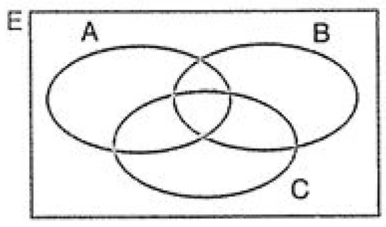
Çözüm

a. 

b. 

c. 

ÖRNEK 58



Yukarıdaki şemayı kullanarak aşağıdaki kümeleri boyayarak gösterelim.

a. $B - C$

b. $A - (B \cup C)$

c. $B \cap (A \cup C)$

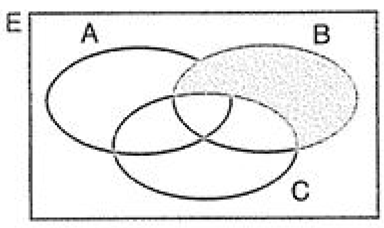
d. $(B \cap A) \cup [C - (A \cup B)]$

e. $C' \cup (A \cap B)$

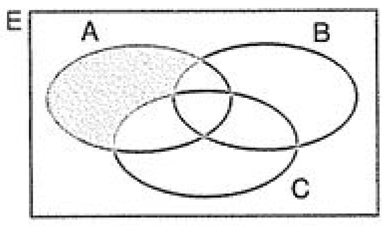
www.supersoru.com

Çözüm

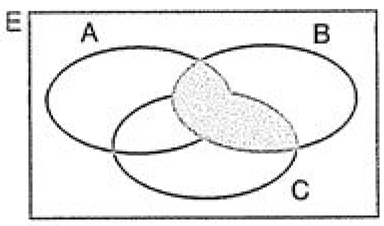
a.



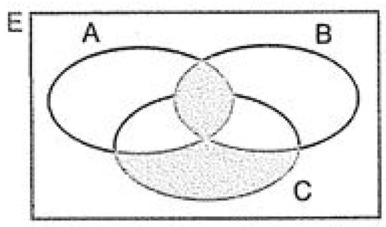
b.



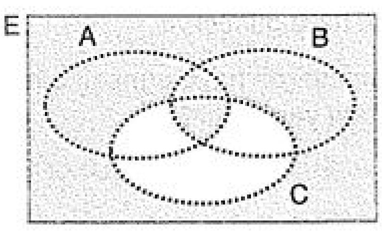
c.



d.



e.



ÖRNEK 59

Sarışın veya esmer çocuklardan oluşan 50 kişilik bir gruptakiler mavi veya kahverengi gözlüdürler.

Esmerler 31, kahverengi gözlüler 18 ve mavi gözlü sarışınlar 14 kişi iseler kahverengi gözlü esmer sayısı kaçtır?

Çözüm

Mavi gözlülerin toplam sayısı a, mavi gözlü esmerlerin sayısı b ve kahverengi gözlü esmerlerin sayısı x olsun. Bunlara göre aşağıdaki tabloyu çizelim.

	Mavi gözlü	Kahverengi gözlü	Toplam
Sarışın	14		
Esmer	b	x	31
Toplam	a	18	50

Mavi gözlülerle kahverengi gözlülerin toplamı 50 dir.

$a + 18 = 50$ ise $a = 32$ dir.

Mavi gözlü sarışınlarla, mavi gözlü esmerlerin toplamı mavi gözlülerin toplam sayısını verir.

$14 + b = a$ ise $14 + b = 32$

ise $b = 18$ dir.

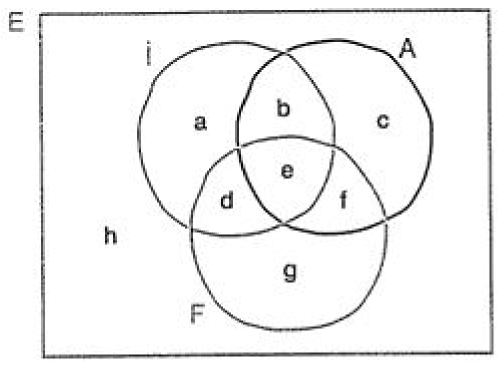
Mavi gözlü esmerlerle, kahverengi gözlü esmerlerin toplamı esmerlerin toplam sayısını verir.

$b + x = 31$ ise $18 + x = 31$

ise $x = 13$ tür.

Öyleyse, kahverengi gözlü esmer 13 kişidir.

ÖRNEK 60



Küme problemlerinde aşağıdaki pratik şema yöntemi kullanılabilir.

Yukarıdaki şemada a, b, c, d, e, f, g, h bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir.

İngilizce bilenlerin kümesi İ, Almanca bilenlerin kümesi A, Fransızca bilenlerin kümesi F, sınıftaki tüm öğrencilerin kümesi E ile gösterilmiştir.

Buna göre,

- Almanca bilenlerin sayısı : $s(A) = b + c + e + f$
- İngilizce bilenlerin sayısı : $s(İ) = a + b + e + d$
- Fransızca bilenlerin sayısı : $s(F) = d + e + f + g$
- Almanca bilmeyenlerin sayısı : $s(A') = a + d + g + h$
- üç dil bilenlerin sayısı : $s(A \cap İ \cap F) = e$
- üç dili de bilmeyenlerin sayısı : $s[(A \cup İ \cup F)'] = h$
- Almanca ve Fransızca bilenlerin sayısı : $s(A \cap F) = e + f$
- İngilizce veya Fransızca bilenlerin sayısı :
  $s(İ \cup F) = a + b + d + e + f + g$
- sadece Almanca bilenlerin sayısı : $s[A - (İ \cup F)] = c$
- en az bir dil bilenlerin sayısı :
  $s(A \cup İ \cup F) = a + b + c + d + e + f + g$
- en çok bir dil bilenlerin sayısı :
  $s[E - [(A \cap F) \cup (İ \cap F) \cup (A \cap İ)]] = a + c + g + h$
- en az iki dil bilenlerin sayısı :
  $s[(A \cap F) \cup (İ \cap F) \cup (A \cap İ)] = b + d + e + f$
- en çok iki dil bilenlerin sayısı :
  $s[E - (A \cap F \cap İ)] = a + b + c + d + f + g + h$

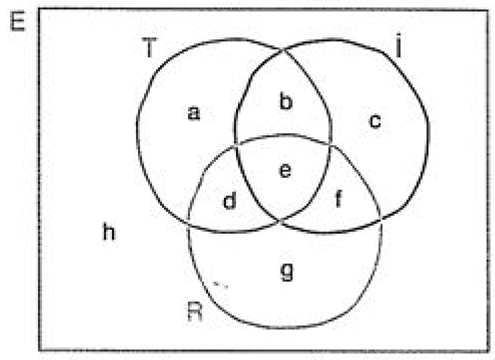
ÖRNEK 61

24 kişilik bir sınıftaki öğrenciler Türkçe, İngilizce veya Rusça dillerini konuşabilmektedir. Üç dili de konuşabilenlerin sayısı, bu dillerden hiçbirini konuşamayanların sayısı kadardır. Sadece iki dili konuşabilenlerin sayısı; üç dili de konuşabilenlerin sayısının iki katı, sadece bir dili konuşabilenlerin sayısının yarısı kadardır.

Bu dillerden hiçbirini konuşamayan kaç öğrenci vardır?

Çözüm :

www.supersoru.com



Yukarıdaki şemada a, b, c, d, e, f, g, h bulundukları bölgelerin (kümelerin) eleman sayılarını göstermektedir.

Türkçe konuşabilenlerin kümesi T, İngilizce konuşabilenlerin kümesi İ, Rusça konuşabilenlerin kümesi R, bütün sınıfın kümesi E ile gösterilmiştir.

$s(T \cap İ \cap R) = s[(T \cup İ \cup R)']$

$e = h \quad \ldots \quad (*)$

$s[[(T \cap İ) \cup (T \cap R) \cup (İ \cap R)] - (T \cap İ \cap R)] = 2 \cdot s(T \cap İ \cap R)$

$b + d + f = 2h \quad \ldots \quad (**)$

$s[(T \cup İ \cup R) - [(T \cap İ) \cup (T \cap R) \cup (İ \cap R)]] = 4 \cdot s(T \cap İ \cap R)$

$a + c + g = 4h \quad \ldots \quad (***)$

$s(E) = 24$

$$\underbrace{a+c+g}_{4h}+\underbrace{b+d+f}_{2h}+\underbrace{e}_{h}+h=24$$

$$8h = 24$$

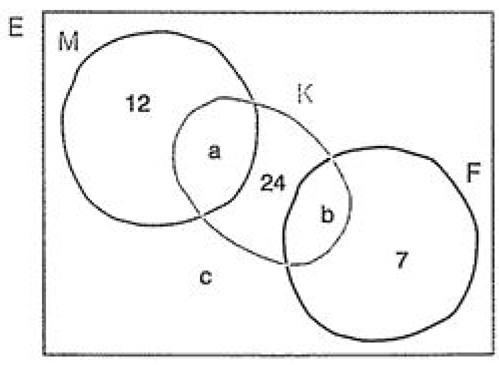
$$h = 3 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, bu dillerden hiçbirini konuşamayan 3 öğrenci vardır.

ÖRNEK 62

Bir sınıfta matematikten geçenler fizikten kalmıştır. Sadece fizikten geçenler sınıfın % 7 si, sadece matematikten geçenler sınıfın % 12 si, sadece kimyadan geçenler sınıfın % 24 üdür. Sınıfın % 53 ü matematik veya fizikten geçmiştir.
Buna göre, üç dersten de kalanlarla kimyadan geçenlerin toplamı sınıfın yüzde kaçıdır?

Çözüm



www.supersoru.com

Matematikten geçenlerin kümesi M, fizikten geçenlerin kümesi F, kimyadan geçenlerin kümesi K, bütün sınıfın kümesi E olsun.

$s(M \cup F) = 53$

$12 + a + b + 7 = 53$

ise $a + b = 34$ tür. ... (*)

$s(M \cup F) + s[K - (M \cup F)] + s[(K \cup M \cup F)'] = 100$

$53 + 24 + c = 100$

$c = 23$ tür. ... (**)

(*) ve (**) den,

$s(K) + s[(K \cup M \cup F)'] = a + b + 24 + c$

$= 34 + 24 + 23$

$= 81$ dir.

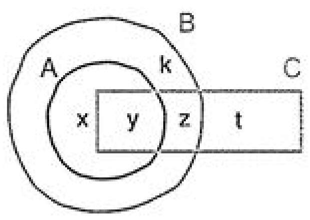
Sonuç olarak, üç dersten kalanlarla kimyadan geçenlerin toplamı sınıfın % 81 idir.

ÖRNEK 63

Halk eğitim merkezindeki kursiyerler A, B ve C kurslarından en az birini almaktadır. A kursunu alan herkes B kursunu da almaktadır. Üç kursu da alanların sayısı, iki kurs alanların sayısının yarısıdır. Yalnız bir kurs alanların sayısı üç kursu da alanların sayısının üç katıdır.

En fazla 50 kişi kapasiteli bir kursta en fazla kaç kursiyer olabilir?

Çözüm :



A kursunu alanların kümesi A, B kursunu alanların kümesi B, C kursunu alanların kümesi C olsun.

Verilenlere göre,

$2 \cdot s(A \cap B \cap C) = s[(A \cap B) - C] + s[(B \cap C) - A]$

$2y = x + z$ ... (*)

$s[C - (A \cup B)] + s[B - (A \cup C)] = 3 \cdot s(A \cap B \cap C)$

$t + k = 3y$ ... (**)

$s(A \cup B \cup C) = \underbrace{x+z}_{2y} + \underbrace{t+k}_{3y} + y$

$= 2y + 3y + y$

$= 6y$ dir. $(y \in \mathbb{Z})$

$6y < 50$ olduğundan, y en fazla 8 olabilir.

Öyleyse, bu kursta en fazla $6 \cdot 8 = 48$ kursiyer olabilir.

Kartezyen Çarpım

Sıralı İkili

a ve b herhangi iki eleman olmak üzere, a ve b ile oluşturulan (a, b) çiftine sıralı ikili veya kısaca ikili denir, (a, b) İkilisinde, a birinci bileşen, b ise ikinci bileşendir.

Sıralı ikili kavramında, adından da anlaşılabileceği gibi, elemanların yazılış sırası önemlidir. Yani, (a, b) sıralı İkilisi (b, a) sıralı İkilisinden farklıdır. Bileşenlerin yerini değiştirdiğimizde yeni bir ikili elde ederiz. Aşağıda verilen örnekle bu kavram daha iyi anlaşılacaktır.

Karşılıklı bileşenleri eşit olan sıralı İkililer birbirine eşittir.

www.supersoru.com

(a, b) = (c, d) <=> (a = c ve b = d)

ÖRNEK

(2 x -1 ,7) = (3 ,3 y -8)

olduğuna göre, x ve y değerlerini bulalım.

Çözüm

2x - 1 = 3 ise x = 2 ve 3y - 8 = 7 ise y = 5 olur.

Kartezyen Çarpım

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, birinci bileşeni A dan, ikinci bileşeni B den alınarak oluşturulan tüm İkililerin kümesine A ile B nin kartezyen çarpımı denir.

Bu küme A x B şeklinde yazılır ve “A kartezyen çarpım B” diye okunur. Tanıma göre,

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

$B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \wedge y \in A\}$ dır.

ÖRNEK

A = {1,2,3}

B = {a, b}

olmak üzere A x B ve B x A kümelerini;

a. liste yöntemiyle yazalım.

b. şema ile gösterelim.

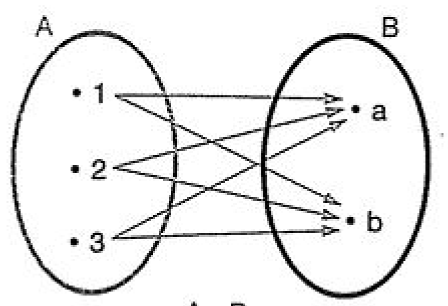
Çözüm

a.

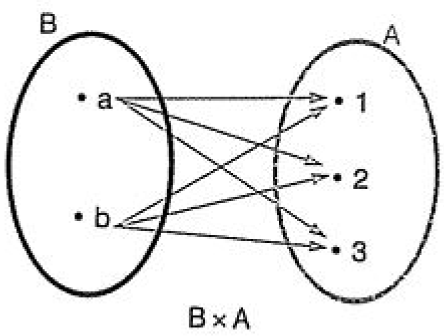
A x B = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}

B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

b.



A × B



B × A

<u>**KURAL**</u> **:**

a. s(A) = a ve s(B) = b ise,

www.supersoru.com

s(A x B) = s(A) . s(B) = a . b dir.

b. A ≠ B ise, A x B ≠ B x A dır.

ÖRNEK

A = {1, 2, 3} ise s(A) = 3 tür.

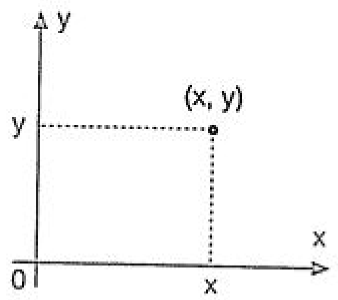
B = {a, b} ise s(B) = 2 dir.

s(Ax B) = s(A) s(B) = 3- 2 = 6 ve

s(Bx A) = s(B)- s(A) = 2 - 3 = 6 dır.

s(A x B) = s(B x A) dır. Ancak, A x B ≠ B x A dır.

İkilinin Analitik Düzlemdeki Görüntüsü



(x, y) İkilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü bir noktadır.

x sayısına noktanın apsisi, y sayısına noktanın ordinatı denir.

Kartezyen Çarpımının Grafiği

A x B kümesinin grafiğini çizmek istediğimizde, A kümesinin elemanlarını (birinci bileşenleri) yatay eksene, B kümesinin elemanlarını da (ikinci bileşenler) dikey eksene yerleştirmemiz gerekmektedir. A ve B kümelerinin elemanlarının bulunduğu noktalardan geçen ve eksenlere dik olarak çizeceğimiz doğruların kesişim noktalarının koordinatları bize A x B kümesinin elemanlarını verecektir.

ÖRNEK

A = {1,2,3}

B = {a,b}

olmak üzere A x B ve B x A kartezyen çarpım kümelerini;

a. liste yöntemiyle yazalım.

b. grafiğini çizelim.

Çözüm

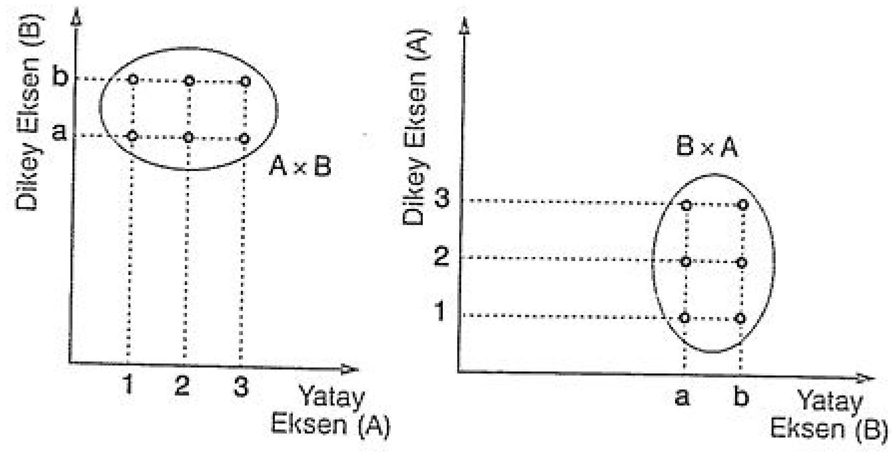
a.

A x B = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}

B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

b.

www.supersoru.com



ÖRNEK

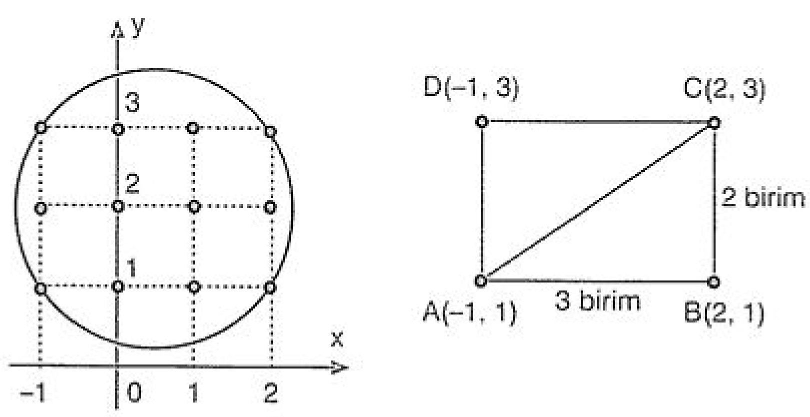
A = { - 1, 0, 1, 2}

B = {1, 2, 3}

kümeleri veriliyor.

A x B (kartezyen çarpımı) kümesinin noktalarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaç birimdir?

Çözüm



A x B nin grafiği 12 noktadan oluşmaktadır.
Bu 12 noktayı dışarıdan bırakmayan en küçük çemberin çapı, köşeleri A(-1,1), B(2,1), C(2,3), D(-1,3) noktaları olan dikdörtgenin köşegenidir. Buna göre, istenen çemberin yarıçapı

$$\frac{\sqrt{2^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2} \text{ birim}$$

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

Boş olmayan A, B, C ve D kümeleri için

a. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

b. $A \times B \neq B \times A$ $(A \neq B$ ise)

c. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
(Birleşme Özelliği)

d. $(A \subset B$ ve $C \subset D) \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$ olur.

e. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

f. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

g. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

h. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ dir.

ÖRNEK

$A = \{1, 2\}$

$B = \{b, c\}$

$C = \{c, d\}$

olmak üzere, aşağıdaki kümeleri bulalım.

a. $A \times (B \cup C)$

b. $(A \times B) \cup (A \times C)$

c. $A \times (B \cap C)$

d. $(A \times B) \cap (A \times C)$

ÇÖZÜM :

a. $B \cup C = \{b, c, d\}$ olduğundan,

$A \times (B \cup C) = \{(1, b), (1, c), (1, d), (2, b), (2, c), (2, d)\}$ dir.

b. $A \times B = \{(1, b), (1, c), (2, b), (2, c)\}$

$A \times C = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d)\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, b), (1, c), (1, d), (2, b), (2, c), (2, d)\}$

a. ve **b.** den, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ eşitliği görülebilir.

c. $B \cap C = \{c\}$ olduğundan,

$A \times (B \cap C) = \{(1, c), (2, c)\}$ dir.

d. **b.** şıkkında $A \times B$ ve $A \times C$ kümelerini bulduk. Bu iki kümenin kesişimi;

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, c), (2, c)\}$ dir.

c. ve **d.** den, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ eşitliği görülebilir.

© 2021 Süper Soru ♥ İletişim

www.supersoru.com