9.Sınıf Matematik Kümelerde Temel Kavramlar Konu Anlatımı

Küme Kavramı

Küme, "nesneler topluluğu veya yığını" olarak tanımlanan bir matematik terimi. Bu tanımdaki "nesne" soyut ya da somut bir şeydir; fakat her ne olursa olsun iyi tanımlanmış olan bir şeyi, bir eşyayı ifade eder. Örneğin, "Türkiye'nin illeri", "Asal sayılar" tümcelerindeki nesnelerin anlaşılabilir, belirgin oldukları, kısaca iyi tanımlı oldukları açıktır. Dolayısıyla bu tümcelerin her biri bir kümeyi tarif eder. O halde, matematikte "İyi tanımlı nesnelerin bir topluluğuna küme denir" biçiminde bir tanımlama sezgisel olarak ilk başta yeterli olacaktır.

Tanımda geçen nesne sözcüğü aslında yeterince açıklık ifade eden bir sözcük değildir. Ama sezgisel olarak, kümeyi oluşturan nesnelerin iyice tanımlı olduklarını; yani belirgin, başka nesnelerden ayırt edilebilir şeyler olduklarını düşünüyoruz demektir. Bir bakıma, bir kümeyi oluşturan nesnelerin tek tek neler olduklarını düşünmekten çok, bir arada düşünebilir olmaları önemsenir.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin öğeleri adı verilir. Güneş, evrendeki yıldızlar kümesinin bir öğesidir. Bir kümenin öğesi olan bir nesneye o kümenin içindedir ya da kümeye aittir denir.

Küme kavramının matematiğe George Cantor (1845-1918) ile girdiği kabul edilir. Elbette Cantor'dan önce de, adına küme denilmese de, matematikçiler bu kavramı yer yer örtülü bir şekilde kullanıyorlardı. Cantor, kümeler kuramının temellerine ilişkin kapsamlı soruları ortaya koydu. Onun çalışmaları ve sorularından yola çıkarak matematiğin temelleri incelendi, araştırıldı, çıkmazları keşfedildi, paradokslarından temizlendi. Bu gelişmeler, matematiğin ve özellikle formalist akımın 20. yüzyılın ilk yarısında büyük ürünler vermesini sağladı. Bunun etkisiyle, Türkiye'de örgün öğretim programlarına "Modern Matematik" olarak adlandırılan konular dahil edildi.

“Yaşayan zeki insanlar” cümlesi iyi tanımlı olmadığı için küme belirtmez. Çünkü zekinin tanımı herkes için aynı değildir.

“Türkiye'nin illeri” cümlesi küme belirtir.

“1924 sayısının rakamları” cümlesi küme belirtir.

Bir kümeyi oluşturan nesnelerden her birine kümenin elemanı (öğesi) denir.

x elemanı A kümesine ait ise x e A şeklinde yazılır ve “x, A kümesinin elemanıdır.” diye okunur. x elemanı A kümesine ait değil ise, x e A şeklinde yazılır ve “x, A kümesinin elemanı değildir.” diye okunur.

“1924 sayısının rakamları” cümlesinin belirttiği kümenin elemanlarını yazalım.

“ 1924 sayısının rakamları” cümlesinin belirttiği kümenin elemanları; 1 ,2 ,4 , 9 dur.

Kümelerin Gösterimi

Kümeler genellikle A, B, C ... gibi büyük harflerle, elemanlar ise genellikle a, b, c ... gibi küçük harflerle gösterilir. Küme gösterimleri matematiğin dilini kurmada önemli bir yere sahiptir.

Bir küme üç farklı şekilde gösterilebilir:

1. Liste Yöntemi 2. Venn Şeması (Diyagramı) Yöntemi 3. Ortak Özellik Yöntemi

1. Liste Yöntemi

Kümenin her bir elemanını, aralarında virgül olacak şekilde, { } sembolü içerisine yazarak göstermeye liste yöntemiyle gösterim denir.

ÖRNEK :

Onluk tabandaki rakamların kümesini yazalım:

A = { 0 , 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} olur.

Liste yöntemi, elemanları çok sayıda olan kümeleri göstermede kullanışlı bir yöntem değildir. Bununla birlikte, kümenin elemanları belirli bir kurala göre birbirini takip ediyor ise, kümeyi liste yöntemiyle göstermek uygun olur.

- Bir kümenin liste yöntemi ile gösteriminde kümenin elemanlarının diziliş sırası önemli değildir.
- Bir kümede her eleman sadece bir defa yazılır.

ÖRNEK :

KARAKARTAL kelimesindeki harflerin kümesini yazalım:

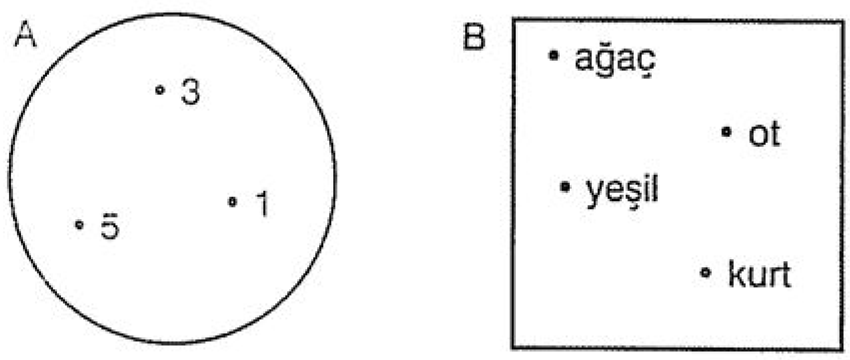
istenen küme M kümesi olsun. Bu kelimenin yazımında kullanılan harfler K, A, R, T, L dir.

Bu durumda M kümesi, M = {K, A, R, T, L} olur.

2. Venn Şeması (Diyagramı) Yöntemi

Kümeleri bazen Venn şeması adı verilen kapalı eğrilerle göstermek mümkündür. Bu gösterimde kümenin her bir elemanı, kapalı eğrilerin içinde belirlenen farklı bir nokta ile belirtilir. Elemanların adları bu noktaların yanına yazılır.

A = {1 ,3 , 5} ve B = {ağaç, ot, yeşil, kurt} kümeleri aşağıda Venn şeması ile gösterilmiştir.



3. Ortak Özellik Yöntemi

Bir küme, bütün elemanlarının sağladığı ortak özelliği belirten bir açık önermeden faydalanılarak gösterilebilir. Bu gösterimde, kümenin elemanlarından her birini temsil eden (x gibi) bir harf seçilir. Elemanların sağlamış olduğu açık önerme ise "x e bağlı olarak" belirtilir.

Dolayısıyla bu küme {x | p(x)} veya {x : p(x)} biçimindedir.

Bu gösterimler, "p(x) açık önermesini sağlayan tüm x lerin kümesi" anlamında kullanılır.

p önermesi ise, kümeyi belirleyen önermedir. Yukarıdaki | sembolüne küme kurma sembolü denir ve bazen : işareti ile gösterilir. Her iki sembol de öyle ki anlamına gelir.

Sözgelimi, A ={10,11,12.....98,99} kümesi ortak özellik yöntemiyle;

A = {x | x iki basamaklı doğal sayı} veya A = {x : x doğal sayı, 9 < x < 100} şeklinde gösterilebilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki kümeleri liste yöntemiyle yazalım.

a. A = {x | x tek basamaklı asal sayı}

b. Ç = {2n | n e Z}

c. T = {2n + 1 | n e Z}

Çözüm

a. A = {2 , 3, 5, 7} dir.

b. Ç = {...,- 4 ,-2 , 0, 2, 4, 6 ,...} kümesi çift sayıları belirtir.

c. T = { ...,- 3 ,- 1 ,1 ,3 , 5 ,...} kümesi tek sayıları belirtir.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler, Boş Küme

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) veya n(A) sembolü ile gösterilir.

Örneğin, A = {a, b, c, d, e} kümesinin 5 elemanı vardır.

O hâlde, s(A) = 5 olur.

x: ilk terim,

s: son terim

r: ortak fark olmak üzere

A = {x, x + r, x + 2r,.... s} şeklinde elemanları arasındaki fark sabit bir reel sayı olan bir kümenin eleman sayısı

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10$, $s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$$s(A) = \frac{s - x}{r} + 1 = \frac{100 - 10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \quad \text{dur.}$$

ÖRNEK 8

Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulalım:

$B = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ise $s(B) = 10$ dur.

$C = \{5, 6, 7, \ldots, 26, 27\}$ ise $s(C) = 23$ tür.

$D = \{10, 12, 14, \ldots, 48, 50\}$ ise $s(D) = 21$ dir.

$E = \{27, 31, 35, \ldots, 75, 79\}$ ise $s(E) = 14$ olur.

$F = \{5, 6, 8, 13, 25, 46, \ldots, 83\}$ kümesinin eleman sayısını bilemeyiz, çünkü küme iyi tanımlanmamıştır.

Sonlu Kümeler

Eleman sayıları doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere sonlu küme denir.

ÖRNEK 9

Aşağıdaki kümeler sonlu kümelerdir:

A = {sınıfımızdaki öğrenciler}

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{x \mid x$ bir tam sayı ve $-5 < x < 5\}$

Sonsuz Kümeler

Sonlu sayıda elemandan oluşmayan kümelere, yani eleman sayıları doğal sayı ile ifade edilemeyen kümelere sonsuz küme denir. Örneğin, doğal sayılar kümesinin N = {0 ,1 ,2 , 3 ,...} elemanları sayılarak bitirilemez.

Dolayısıyla, N sonsuz bir kümedir. "Vücudumuzdaki hücreler kümesi" ve "doğal sayılar kümesi" ni düşünelim. İlk küme her ne kadar çok elemanlı bir küme olsa da, sonlu sayıda eleman içerir. Oysa ikinci kümenin sonsuz sayıda elemanı vardır. Sonsuz elemanlı kümeye bir başka örnek de, bir doğru üzerindeki noktaların kümesidir.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x$ reel sayıdır ve $-5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

Boş Küme

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme, $\varnothing$ ya da **{ }** biçiminde gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. $s(\varnothing) = 0$

$\{\varnothing\}$ veya $\{\{\ \}\}$ kümeleri boş küme değildir.

Alt Küme

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A nın her elemanı B nin de elemanı ise, "A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir." veya " B kümesi A kümesini kapsar." denir.

Bu durum $A \subset B$ veya $B \supset A$ şeklinde gösterilir.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Örneğin, tam sayılar kümesi (Z), doğal sayılar kümesini (N) kap sar. Yani, her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.
A kümesinde olup B de olmayan en az bir eleman varsa "A kümesi B kümesinin, bir ali kümesi değildir." veya " B kümesi A kümesini kapsamaz." denir.

Örnek :

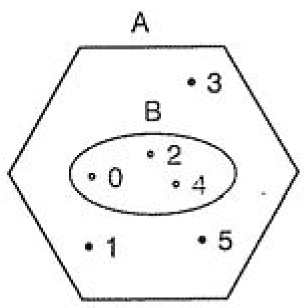
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

kümeleri veriliyor.

B kümesinin A nın alt kümesi olduğunu Venn şemasıyla gösterelim.

Çözüm



$B \subset A$

Teorem :

1. Her küme kendisinin bir alt kümesidir.
2. Boş küme, her kümenin alt kümesidir.

Küme	Alt Kümeleri
$\varnothing$	$\varnothing$
$A = \{a\}$	$\varnothing, \{a\}$
$B = \{1, 2\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
$C = \{a, b, c\}$	$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
$D = \{1, 2, 3, 4\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$ $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$ $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\},$ $\{1, 2, 3, 4\}$

Burada, $\varnothing \subset A, \varnothing \subset B, \varnothing \subset C, \varnothing \subset D,$

$\varnothing \subset \varnothing, A \subset A, B \subset B, C \subset C, D \subset D$ ve

$A \subset C,\ B \subset D$ olduğuna dikkat ediniz.

Teorem :

n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi vardır.

Yukarıdaki örnekte;

$s(\varnothing) = 0$ için alt küme sayısı $2^0 = 1$,

$s(A) = 1$ için alt küme sayısı $2^1 = 2$,

$s(B) = 2$ için alt küme sayısı $2^2 = 4$,

$s(C) = 3$ için alt küme sayısı $2^3 = 8$,

$s(D) = 4$ için alt küme sayısı $2^4 = 16$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 13

256 tane alt kümesi olan A kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$s(A) = n$ olsun.

$2^n = 256$

$2^n = 2^8$ ise $n = 8$ olur.

ÖRNEK 14

A kümesinin eleman sayısı, B kümesinin eleman sayısından 2 eksiktir. B kümesinin alt küme sayısı ise A kümesinin alt küme sayısından 24 fazla olduğuna göre, A kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm

$s(A) = n$ ise $s(B) = n + 2$ dir.

$2^{n+2} = 2^n + 24$

$2^n \cdot 2^2 = 2^n + 24$

$4 \cdot 2^n = 2^n + 24$

$3 \cdot 2^n = 24$

$2^n = 8$

$2^n = 2^3$ ise $n = 3$ olur.

ÖRNEK 15

$A = \{a, c, d\}$

$B = \{a, b, c, d, e, f\}$

olduğuna göre, $A \subset K \subset B$ şartını sağlayan kaç tane K kümesi vardır?

Çözüm

s(A) = 3,

s(B) = 6 ve

$A \subset B$ dir.

K kümesinde a, c, d elemanları mutlaka bulunmalıdır.

B kümesindeki b, e, f elemanları K kümesinde bulunabilir ve bu elemanlarla $2^3 = 8$ tane alt küme oluşturulabilir. Bu alt kümelerin her birine A kümesinin bütün elemanları da yazılırsa, A kümesini kapsayan B kümesinin alt kümeleri elde edilmiş olur. Örneğin, {a, c, d} ve {a, c, d, e} bu alt kümelerden iki tanesidir.

Yani 8 tane K kümesi yazılabilir.

ÖZ ALTKÜME

Bir kümenin kendisinden farklı tüm alt kümelerine, o kümenin öz alt kümeleri denir.

ÖRNEK 16

A = {1, 2, 3} kümesinin bütün öz alt kümelerini bulalım.

Çözüm

Öz alt kümeler ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2} , {1, 3} ve {2, 3} tür.

ÖRNEK 17

A = {1, 2, {a, b}, 3, {4}, Δ} kümesinin alt küme sayısı ile öz alt küme sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm

s(A) = 6 olduğundan,

alt küme sayısı $2^6 = 64$,

öz alt küme sayısı $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ tür.

Bunların toplamı ise 64 + 63 = 127 dir.

ÖRNEK 19

Bir kümenin 4 elemanlı alt küme sayısı 2 elemanlı alt küme sayısına eşitse, bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

Bu kümenin eleman sayısı n olsun. 4 elemanlı alt kümeleri sayısı 2 elemanlı alt kümeleri sayısına eşit olduğuna göre,

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{2} \text{ dir.}$$

Buradan, n = 4 + 2 = 6 olur.

KUVVET KÜMESİ

A kümesinin bütün alt kümelerinin kümesine A nın **kuvvet kümesi** denir. Kuvvet kümesi **P(A)** veya 2^A ile gösterilir.

ÖRNEK 23

A = {x, y, z} kümesinin kuvvet kümesini yazalım:

P(A) = {∅, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z}} olur.

Burada, $\{x\} \subset A$

$\{x\} \in P(A)$

$\{\{x\}\} \subset P(A)$ olduğuna dikkat ediniz.

n elemanlı bir A kümesinin kuvvet kümesinin eleman sayısı 2^n dir.

Yani, $s[P(A)] = 2^n$ dir.

ÖRNEK 24

A = {a, b, c, d} kümesinin kuvvet kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

$s(A) = 4$ olduğundan $s[P(A)] = 2^4 = 16$ olur.

Siz de P(A) kümesini yazarak 16 elemanlı olduğunu görünüz.

ÖRNEK25

Boş kümenin kuvvet kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

A boş küme ise $s(A) = 0$ olduğundan $s[P(A)] = 2^0 = 1$ olur.

DENK KÜMELER

Elemanları bire bir eşlenebilen kümelere **denk kümeler** denir. Dolayısıyla, eleman sayıları eşit olan kümeler denk kümelerdir. A ve B gibi iki kümenin birbirine denk olması **A ≡ B** şeklinde gösterilir ve **"A kümesi B kümesine denktir"** diye okunur.

$$A \equiv B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$$

ÖRNEK 26

A = {x, y, z, t} ve

B = {sayı, rakam, onluk, birlik}

kümelerini inceleyelim:

$s(A) = s(B) = 4$ olduğundan $A \equiv B$ dir.

ÖRNEK 27

Tam sayılar kümesi, çift tam sayılar kümesine denktir. Tam sayılar kümesinin her elemanını 2 ile çarparak çift tam sayılar kümesinin elemanları elde edilir.

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \\ \qquad\quad\ \downarrow\ \ \ \downarrow\ \ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \mathbb{Z}_{Ç} = \{\ldots,-6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\} \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_{Ç}$ kümelerinin elemanları arasında bire bir eşleme yapılmış olur. ($Z \equiv Z_{Ç}$)

EŞİT KÜMELER

Elemanları aynı olan kümelere "eşit kümeler" denir. A ve B kümelerinin birbirine eşit olması A = B şeklinde yazılır ve "A kümesi B kümesine eşittir." diye okunur.

A kümesinin B kümesine eşit olması için A ve B den her birinin diğerinin alt kümesi olması gerekir. Yani,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \ \text{ ve } \ B \subset A) \ \text{dır.}$$

$X = \{n \mid n \text{ asal sayı}, 2 < n < 10\}$,

$Y = \{k \mid k \text{ tek sayı}, 2 < k < 9\}$,

kümelerinin birbirlerine eşit olduğunu gösteriniz.

Eşit kümeler denktir. Ancak, bunun karşıtı doğru değildir.