9.Sınıf Matematik Mantık Konu Anlatımı

Önermeler Mantığı

Mantık doğru düşünmenin bilimidir. Doğru düşünmenin kurallarını koyan normatif (kurala dayalı) bir bilimdir. Mantık, düşüncenin doğru ve yanlış olduğunu ortaya koymakta yardımcı bir bilimdir. İnsanın doğru düşünmesini düzenlemeye çalışır. Bunun için birçok prensipler ve çeşitli araştırma usulleri tespit edip kanun şekline koyar. Böylece, insanın doğruyu bulmasına ve yanlışı reddetmesine yardımcı olur.

Antik çağdan günümüze gelen kalıntılarda mantık ile uğraşan düşünürlerin var olduğu görülmektedir. Bunlar arasında, mantık biliminin oluşmasında en etkili olanı Aristotle (Aristo)'dur.

Çağdaş mantığın ve çağdaş felsefenin kurucusu Alman mantıkçısı Gottlob Frege (1848-1925), "Matematik mantığın uygulama alanıdır." görüşünden hareketle matematiğin, mantığın aksiyomatik sistemi üzerine kurulabileceğini düşünmüştür. Bu düşünceden hareket ederek aritmetiğin temelleri konusundaki felsefi çalışmaları için bir mantık sistemi geliştirmişti.

Günümüzdeki mantık yukarıdaki şemadaki biçimiyle, Aristo Mantığı ve Sembolik Mantık adlı iki ana başlık altında işlenmektedir.

A. TERİM, TANIMLI VE TANIMSIZ TERİMLER

Bir sözlük herhangi bir kelimeyi diğer kelimeler yardımıyla tanıtır. Bu işleme kelimeyi tanımlamak adı verilir. Matematikte bir tanım yapabilmek için günlük konuşma dilinde olan veya olma yan bir çok kelime kullanırız. Burada, kullanacağımız temel kelimelerin anlamlarını öğreneceğiz.

Bir bilim dalı içerisinde, o bilim dalına ait özel anlamları olan kelimelerin her birine terim denir. Matematik bilimine ait terim lere matematiksel terim adı verilir.

Örneğin,

- Küme, küp, çember, daire, çarpma, rakam, arakesit birer matematik terimidir.
- Ofsayt, taç, korner, krampon, serbest vuruş, ceza sahası birer futbol terimidir.
- Anestezi, serum, aşı, diyabet, kardiyoloji, nöroloji birer tıp terimidir.

Terimlerin tanımlama sırasının ilk basamağında ilkel terimler ya da tanımsız terimler bulunur. Tanımsız terimler, genellikle, sezgi ile anlaşılır.

Örneğin, “nokta” bir tanımsız terimdir. Noktayı düzlemde veya uzayda kabul ederek birçok terimi tanımlayabiliriz. Matematiğin tanımsız terimleri arasında “doğru”, “yanlış”, “düzlem", “eleman” ve “değişken” de sayabiliriz.

MANTIK sayesinde, doğru ve sistemli düşünmenin kurallarını öğreniriz. Mantık sözcüğü, Arapça söylemek, demek, konuşmak, dile getirmek anlamlarına gelen “nutk” (nutuk) kökünden türetilmiştir.

Mantık sözcüğünün batı dillerindeki tüm karşılıkları Yunanca “logos” sözcüğünden gelir. (Almanca: logik, Fransızca: logique, İngilizce: logic, Latince: logica) “Logos” ise akıl, düşünme, yasa, düzen, ilke, söz vb. anlamları içerir.

B. ÖNERME

Mantıkta cümleler yanlış ya da doğru olarak nitelendirilebilen ve birer hüküm bildiren bir yapıda olmalıdır. Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere önerme denir.

Doğru olan bir önerme her zaman, her yerde ve herkes için doğru olmalıdır. Yanlış olan bir önerme için de durum aynıdır. Sembolik mantık sadece bu tür cümleleri inceler.

Örnek 1 :

Aşağıdaki ifadelerden hangileri önermedir? Önerme ise doğru ya da yanlış olduğunu belirtelim.

a. $3^2 = 9$
b. $3 < 2$
c. At 4 ayaklı bir hayvandır.
d. Okuyor musun?
e. Aşk olsun!

Cevap :

a. $3^2 = 3 \bullet 3 = 9$ olduğundan "$3^2 = 9$" doğru önermedir.
b. 3 sayısı 2 den büyüktür. Bu durumda “$3 < 2$" yanlış önermedir.
c. “At 4 ayaklı bir hayvandır." doğru önermedir.
d. “Okuyor musun?” soru cümlesi olduğundan önerme değildir.
e. “Aşk olsun!” önerme değildir.

C. ÖNERMELERİN SEMBOLLERLE GÖSTERİMİ VE DOĞRULUK DEĞERLERİ

Matematikte önermeler genellikle p, q, r, s ... gibi harflerle gösterilirler. Bir önermenin doğru ya da yanlış bir hüküm bildirmesi gerektiğini öğrenmiştik. Herhangi bir p önermesi doğru iken (kısaca) D veya 1, yanlış iken Y veya 0 biçiminde ifade edilir. Burada 1 veya 0 ın sayı değeri yoktur. 1 ile 0 önermenin doğru veya yanlış olduğunu gösteren birer semboldür.

Bir önermenin hükmünün doğru ya da yanlış olduğunu ifade eden 1 ve 0 sembollerine o önermenin doğruluk değerleri; doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya da doğruluk tablosu denir.

Yukarıdaki tanıma göre bir p önermesinin doğruluk değerleri aşağıdaki tablolardan biriyle gösterilir.

p	p	p
Doğru	D	1
Yanlış	Y	0

p ve q ile gösterilen herhangi iki önermeyi göz önüne alalım, p doğru iken q, doğru ya da yanlış olabilir. Benzer şekilde, p yanlış iken q, doğru ya da yanlış olabilir. Buna göre p ile q önermelerinin doğruluk değerlerinin birbirlerine göre alabilecekleri farklı durumlar, aşağıda verilen doğruluk tablosunda gösterildiği şekilde olacaktır. Tablodan, p ve q gibi iki önermenin doğruluk değerlerinin $2^2 = 4$ farklı sıralamasının olduğu görülmektedir.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

Bir önerme için 2^1, iki önerme için 2^2, üç önerme için 2^3 tane doğruluk değeri vardır. Öyleyse dört önerme için 2^4, beş önerme için 2^5......n önerme için 2^n tane doğruluk değeri vardır.

Bulanık mantık (fuzzy logic), 1961 yılında Lotfi A.Zadeh (Lütfi Askarzade) tarafından yayınlanan yapay zeka uygulamaları hakkında bir makalenin sonucu oluşmuş, iki değerli mantık ve olasılık teorisine alternatif olarak geliştirilmiş bir mantık yapısıdır.

Eşdeğer Önermeler : Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye denk önermeler veya eşdeğer önermeler denir.

D. BİR ÖNERMENİN DEĞİLİ (OLUMSUZU)

p önermesi doğru ise, p önermesini yanlış yapmak için ne yaparsınız? Peki q önermesi yanlış ise, q önermesini doğru yapmak için ne yaparsınız? "13 tek sayıdır." önermesi ile "13 tek sayı değildir." önermelerine dikkat ediniz. Bunlardan birinci önermenin sonuna "değil" kelimesi eklenerek yapılan ikinci önerme, birincinin değilidir.

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye bu önermenin değili (olumsuzu) denir. Bir p önermesinin değili **p'**, **~ p** sembollerinden birisi ile gösterilir ve p nin değili diye okunur.

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme, $\varnothing$ ya da { } biçiminde gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. $s(\varnothing) = 0$

$\{\varnothing\}$ veya $\{\{\ \}\}$ kümeleri boş küme değildir.

ÖRNEK 47

"$2x + 7 = 3 \Rightarrow x^3 = -8$" önermesinin ispatını yapalım ve akıl yürütmeler zincirinin her halkasında uyguladığımız işlemlerin yine bir matematiksel işleme dayandığını görelim.

Çözüm

$2x + 7 = 3 \Rightarrow x^3 = -8$ (teorem)

$p : 2x + 7 = 3$ (hipotez)

$q : x^3 = -8$ (hüküm)

$2x + 7 = 3 \Rightarrow 2x + 7 - 7 = 3 - 7$ (Eşitliğin iki yanından aynı sayı çıkarılabilir.)

$\Rightarrow 2x = -4$ (çıkarma işlemi)

$\Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{-4}{2}$ (Eşitliğin iki yanı sıfırdan farklı sayıya bölünebilir.)

$\Rightarrow x = -2$ (bölme işlemi)

$\Rightarrow x^3 = (-2)^3$ (kuvvet işlemi)

$\Rightarrow x^3 = -8$ ($(-2)^3 = -8$ dir.)

Bileşik Önermeler

Önermeleri birbirine bağlayan "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" gibi terimlere **mantıksal bağlaç** denir. Bağlaçlarla birleştirilerek oluşturulan bileşik cümleler de doğru veya yanlış bir hüküm bildireceğinden, birer önermedirler.

Birden çok önermenin “veya”, “ve”, “ise", “ancak ve ancak” gibi bağlaçlarla bağlanmasından elde edilen yeni önermelere bileşik önermeler denir. Bu bağlaçlarla birbirine bağlanan önermelere bileşik önermenin “**bileşenleri**” denir.

“Önermeler mantığı” basit önermelerden bileşik önermeler elde edilmesini inceler. Bu yapıda basit önermelerin iç yapısı incelenmez. Basit önermelerin incelenmesi “**niceleyiciler mantığının**” konusudur.

Dil bilgisi kurallarına göre “ve" ile “veya” birer bağlaçtır. Fakat dil bilgisinde “ise” ile “ancak ve ancak" birer bağlaç değildir. Biz burada “bağlaç" terimini matematiksel olarak düşüneceğiz.

VEYA BAĞLACI (v)

Günlük konuşma dili aslında iki ya da daha fazla basit önermenin “veya" bağlacıyla birleştirilmesinden oluşan bileşik önermelerle doludur.

Örneğin;

“x asal sayıdır" ile “y çift sayıdır.” basit önermelerinden
“x asal sayıdır veya y çift sayıdır." bileşik önermesi yazılabilir.

p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, bu iki önermeden, en az biri doğru (1) iken doğru, her ikisi de yanlış (0) iken yanlış olan önermeye p veya q bileşik önermesi denir ve p v q şeklinde gösterilir.

Tanıma göre, p v q nun doğruluk tablosu aşağıda iki farklı şekilde yapılmıştır. İnceleyiniz.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

ÖRNEK 42

Aşağıdaki önermeleri kurallı cümle biçiminde ifade ederek doğruluk değerlerini bulalım.

a. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$

b. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$

Çözüm

a. $n^2 < 3$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar, 0 ile 1 dir.

“$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$" ifadesi, “bazı doğal sayıların karesi 3 ten küçüktür." demektir. Bu durumda bu önerme doğrudur. Doğruluk kümesi de $D = \{0, 1\}$ dir.

b. Hiçbir reel sayının karesinin negatif olamayacağını biliyoruz. $x^2 + 1 = 0$ ise $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan reel (gerçek) sayı yoktur. “$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$” ifadesi, “en az bir x reel (gerçek) sayı için $x^2 + 1 = 0$ dır.” demektir. Bu durumda bu önerme yanlıştır. Doğruluk kümesi de $D = \varnothing$ dir.

Teorem :

p, q ve r önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

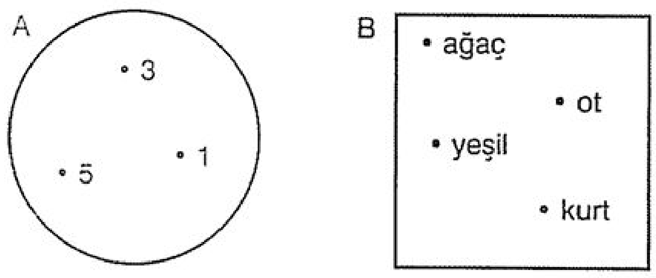
a. $p \vee p \equiv p$ (∨ nın tek kuvvet özelliği)

b. $p \vee q \equiv q \vee p$ (∨ nın değişme özelliği)

c. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (∨ nın birleşme özelliği)

d. $p \vee 1 \equiv 1$

e. $p \vee 0 \equiv p$



VE BAĞLACI: (^)

“Salih evdedir." ile “Ömer okuldadır.” basit önermelerini “ve" sözcüğüyle birleştirerek elde edilen “Salih evdedir ve Ömer okuldadır.” bileşik önermesini inceleyelim. Dikkat edilirse, bu bileşik önermenin doğru olabilmesi için önermenin bileşenlerinin her ikisinin de doğru olması gerekir. Önermenin yanlış olması için ise, bileşenlerden en az birinin yanlış olması yeterlidir.

p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, bu iki önermenin her ikisinin de doğru (1) olduğu durumda doğru, en az birinin yanlış (0) olduğu durumda yanlış olan önermeye p ve q bileşik önermesi denir ve p ^ q şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 53

"Tek bir tam sayı ile çift bir tam sayının çarpımı, çift bir tam sayıdır." **teoremini deneme yöntemiyle ispatlayalım.**

Çözüm

$x = 3$ (tek sayı), $y = 4$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 3 \cdot 4 = 12$ (çift sayı)

$x = (-5)$ (tek sayı), $y = (-2)$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = (-5) \cdot (-2) = 10$ (çift sayı)

$x = 7$ (tek sayı), $y = (-6)$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 7 \cdot (-6) = -42$ (çift sayı)

$x = (-1)$ (tek sayı), $y = 2$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = (-1) \cdot 2 = -2$ (çift sayı) olduğundan teorem doğrudur.

Teorem :

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

ÖRNEK 36

$(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q'$

bileşik önermesinin totoloji olduğunu

a. önermeler cebiri ile

b. doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

a. $(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q' \equiv ((p')' \wedge (q')') \vee (p' \wedge q) \vee q'$

$\equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)] \vee q'$

$\equiv [(q \wedge p) \vee (q \wedge p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge (p \vee p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge 1] \vee q'$

$\equiv q \vee q'$

$\equiv 1$

Verilen bileşik önerme totolojidir.

ÖRNEK 47

"$2x + 7 = 3 \Rightarrow x^3 = -8$" önermesinin ispatını yapalım ve akıl yürütmeler zincirinin her halkasında uyguladığımız işlemlerin yine bir matematiksel işleme dayandığını görelim.

Çözüm

$2x + 7 = 3 \Rightarrow x^3 = -8$ (teorem)

$p : 2x + 7 = 3$ (hipotez)

$q : x^3 = -8$ (hüküm)

$2x + 7 = 3 \Rightarrow 2x + 7 - 7 = 3 - 7$ (Eşitliğin iki yanından aynı sayı çıkarılabilir.)

$\Rightarrow 2x = -4$ (çıkarma işlemi)

$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$ (Eşitliğin iki yanı sıfırdan farklı sayıya bölünebilir.)

$\Rightarrow x = -2$ (bölme işlemi)

$\Rightarrow x^3 = (-2)^3$ (kuvvet işlemi)

$\Rightarrow x^3 = -8$ ($(-2)^3 = -8$ dir.)

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10$, $s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19$ dur.

ÖRNEK 42

Aşağıdaki önermeleri kurallı cümle biçiminde ifade ederek doğruluk değerlerini bulalım.

a. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$

b. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$

Çözüm

a. $n^2 < 3$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar, 0 ile 1 dir.

"$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$" ifadesi, "bazı doğal sayıların karesi 3 ten küçüktür." demektir. Bu durumda bu önerme doğrudur. Doğruluk kümesi de $D = \{0, 1\}$ dir.

b. Hiçbir reel sayının karesinin negatif olamayacağını biliyoruz. $x^2 + 1 = 0$ ise $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan reel (gerçek) sayı yoktur. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$" ifadesi, "en az bir x reel (gerçek) sayı için $x^2 + 1 = 0$ dır." demektir. Bu durumda bu önerme yanlıştır. Doğruluk kümesi de $D = \varnothing$ dir.

Bileşik Önermelerin Değili (Olumsuzu)

2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10,\ s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \text{ dur.}$$

2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

p herhangi bir önerme olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $p \vee p' \equiv 1$ (Totoloji)

b. $p \wedge p' \equiv 0$ (Çelişki)

c. $p \vee 1 \equiv 1$ (Totoloji)

d. $p \wedge 0 \equiv 0$ (Çelişki)

Sembolik mantığın, matematik dışında da birçok uygulama sa hası vardır. Örneğin, fen ve teknoloji derslerinde gördüğünüz elektrik devreleri, şu ana kadar öğrendiğiniz önerme işlemlerinin etkili bir kullanım alanıdır.

Bilgisayarlarda işlemleri yürüten birim " CPU" yani " Merkezi İşlem Birimi" dir. Çok karmaşık yapıya sahip olan bu işlemciler aslında sadece ikilik düzeyinde yani " 1" ve " 0" larla çalışır ve bütün karar verme işlem yürütme mekanizmalarının temeli " mantık kapıları" dır.

Koşullu Önermeler

SE BAĞLACI (=>)

İse bağlacının matematiksel anlamını daha iyi anlayabilmek için aşağıda verilen önermeleri dikkatlice okuyunuz.

" Hava yağışlı ise yerler ıslaktır." ... (1)

"Ahmet şişman, Mehmet ise çok zayıftır." ... (II)

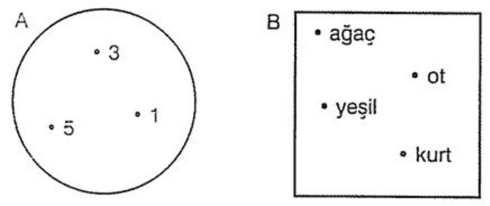
(I) numaralı önerme "Hava yağışlıdır" ve "yerler ıslaktır" basit önermelerinin "ise" bağlacıyla birbirlerine bağlanmasından elde edilen bir bileşik önermedir. Bu bileşik önermede "ise", "şart bağlacı" olarak kullanılmıştır.

(II) numaralı önermede "ise" kelimesi bağlaç olarak değil de "edat" olarak kullanılmıştır.

Biz bu konuda "ise" yi (I) numaralı önermedeki anlamıyla kullanacağız. Bu yüzden matematikteki "ise" bağlacına "şart bağlacı" adını verebiliriz. "İse" bağlacıyla birbirine bağlanarak oluşturulan bileşik önermelere de "**koşullu önerme**" diyeceğiz.

p ve q herhangi iki önerme olmak üzere, p doğru, q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğru olan önermeye, p ise q bileşik önermesi veya koşullu önerme denir ve p => q şeklinde gösterilir.

Tanıma göre, p => q nun doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.



Aşağıdaki örneği dikkatlice incelediğinizde, "=>" bağlacını daha iyi anlayacaksınız.

Bir politikacı diyor ki: "Eğer başkan seçilirsem, fiyatlar aşağı düşecek."

Bu bileşik önermeyi oluşturan iki basit önerme için doğruluk tablosu yapalım, p önermesi "Eğer başkan seçilirsem", q önermesi "Fiyatlar aşağı düşecek." olsun. Buna göre dört farklı durum vardır.

ÖRNEK 54

"x bir asal sayı ise tektir."

önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösterelim.

Çözüm

x = 2 nin asal ve çift sayı olduğunu söylemek yeterlidir. Bu örnekle "x bir asal sayı ise tektir." önermesinin yanlış olduğu ispatlanmış olur.

Durum	Seçildi mi?	Fiyatlar düştü mü?	Değerlendirme
1	Evet (1)	Evet (1)	Sonuç olumlu (1)
2	Evet (1)	Hayır (0)	Sonuç olumsuz (0)
3	Hayır (0)	Evet (1)	Sonuç olumlu (1)
4	Hayır (0)	Hayır (0)	Sonuç olumlu (1)

ÖRNEK 36

$(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q'$

bileşik önermesinin totoloji olduğunu

a. önermeler cebiri ile

b. doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

a. $(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q' \equiv ((p')' \wedge (q')') \vee (p' \wedge q) \vee q'$

$\equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)] \vee q'$

$\equiv [(q \wedge p) \vee (q \wedge p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge (p \vee p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge 1] \vee q'$

$\equiv q \vee q'$

$\equiv 1$

Verilen bileşik önerme totolojidir.

p=>q koşullu önermesinde, p önermesine hipotez, q önermesine **hüküm** denir.

ÖRNEK 16

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a. $(4 + 5 = 9) \Rightarrow (4 = 9 - 5)$

b. $(3^2 = 9) \Rightarrow (2 = 3)$

Çözüm

a. $4 + 5 = 9$ eşitliği doğru olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 1 dir.

$4 = 9 - 5$ eşitliği doğru olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 1 dir. Bu durumda

$$4 + 5 = 9 \Rightarrow 4 = 9 - 5$$
$$1 \Rightarrow 1 \equiv 1 \text{ dir.}$$

Doğru bir hipotezden, doğru işlemlerle doğru bir hüküm elde edilir. Bir eşitliğin her iki yanından aynı sayı çıkarılabilir. Buna göre,

$$4 + 5 = 9 \Rightarrow 4 + 5 - 5 = 9 - 5$$
$$\Rightarrow 4 + 0 = 4$$
$$\Rightarrow 4 = 4$$

b. $3^2 = 9$ eşitliği doğru olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 1 dir.

$2 = 3$ yanlış olduğundan bu önermenin doğruluk değeri 0 dır.

$$3^2 = 9 \Rightarrow 2 = 3$$
$$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$$

Doğru bir hipotezden, yanlış bir hüküm, hiçbir doğru işlemle elde edilemez. Yani, $3^2 = 9$ eşitliği kullanılarak, doğru matematiksel tanım ve işlemlerle $2 = 3$ eşitliği elde edilemez.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

$q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin karşıtı denir.

Mantıkta, bir koşullu önermenin karşıtı, onun hükmünün yer değiştirmesiyle elde edilir.

"Ali randevuyu kaçırdı ise onun treni geç gelmiş olmalı." önermesinin karşıtı "Ali'nin treni geç geldi ise o randevuyu kaçırmış olmalı." önermesidir.

Tanıma göre, $p \Rightarrow q$ nun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

"Baba olma" bağıntısı ile "evlat olma" bağıntısı birbirinin karşıtıdır. Niçin?

∃ sembolü "bir tek", "bazı" veya "en az", anlamına gelir.

$\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 = 0$ ifadesi "Karesi sıfır olan bir tek tam sayı vardır." demektir.

Sonuç olarak; p => q koşullu önermesi doğru iken, bunun karşıtı olan q => p önermesi doğru ya da yanlış olabilir.
Fakat p => q önermesi yanlış iken q => p önermesi daima doğrudur.

$p' \Rightarrow q'$ koşullu önermesine $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin tersi denir.

Tanıma göre, $p \Rightarrow q$ nun tersi olan $p' \Rightarrow q'$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$p' \Rightarrow q'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

$p' \Rightarrow q'$ önermesi ile $q \Rightarrow p$ önermesinin doğruluk değerlerini karşılaştırınız. ($q \Rightarrow p \equiv p' \Rightarrow q'$ olduğunu görünüz.)

ÖRNEK 19

Aşağıdaki önermelerin terslerini yazarak doğruluk değerlerini bulalım.

a. $3 < 4 \Rightarrow 3^2 < 4^2$

b. $2 < 5 \Rightarrow 5 < 2$

c. $6 = 4 \Rightarrow 10 = 10$

d. $2! = 4 \Rightarrow 3! = 12$

Çözüm

a. $3 \geq 4 \Rightarrow 3^2 \geq 4^2 \quad (0 \Rightarrow 0 \equiv 1)$

b. $2 \geq 5 \Rightarrow 5 \geq 2 \quad (0 \Rightarrow 1 \equiv 1)$

c. $6 \neq 4 \Rightarrow 10 \neq 10 \quad (1 \Rightarrow 0 \equiv 0)$

d. $2! \neq 4 \Rightarrow 3! \neq 12 \quad (1 \Rightarrow 1 \equiv 1)$

ÖRNEK 42

Aşağıdaki önermeleri kurallı cümle biçiminde ifade ederek doğruluk değerlerini bulalım.

a. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$

b. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$

Çözüm

a. $n^2 < 3$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar, 0 ile 1 dir.

"$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$" ifadesi, "bazı doğal sayıların karesi 3 ten küçüktür." demektir. Bu durumda bu önerme doğrudur. Doğruluk kümesi de $D = \{0, 1\}$ dir.

b. Hiçbir reel sayının karesinin negatif olamayacağını biliyoruz. $x^2 + 1 = 0$ ise $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan reel (gerçek) sayı yoktur. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$" ifadesi, "en az bir x reel (gerçek) sayı için $x^2 + 1 = 0$ dır." demektir. Bu durumda bu önerme yanlıştır. Doğruluk kümesi de $D = \varnothing$ dir.

p(x) açık önermesi A kümesi üzerinde tanımlanmış olsun. A daki her eleman için p(x) doğru bir önerme oluyorsa,

$(\forall x \in A)\ p(x)$ veya $\forall x,\ p(x)$ yazılır.

Her biri, hepsi, bütünü anlamlarına gelen $\forall$ sembolü **evrensel niceleyicidir.**

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

ÖRNEK30

p : "x = 3"

q : "2x + 5 = 11"

olmak üzere,

x = 3 için, p önermesi de q önermesi de doğrudur. Bu durumda $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ dir. Buna göre, $p \Leftrightarrow q \equiv 1$ dir.

$x \neq 3$ olmak üzere, p önermesi de q önermesi de yanlıştır. Bu durumda $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ dir. Buna göre, $p \Leftrightarrow q \equiv 1$ dir.

O hâlde, $p \Leftrightarrow q$: "x = 3 tür ancak ve ancak 2x + 5 = 11" bileşik önermesi bir çift gerektirmedir.

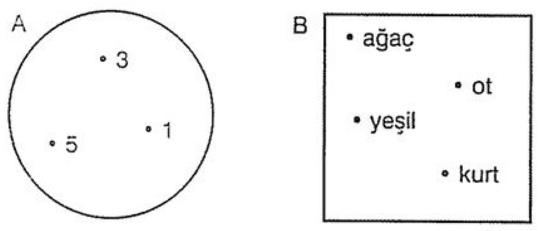
ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$



3. Çelişki Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoreminin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$ nun değilinin yanlış olduğunu göstermeye dayanan ispat yöntemine **çelişki yöntemi** ile ispat denir.

$$p \Rightarrow q \equiv 1 \text{ iken } (p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$$
$$\equiv p \wedge q'$$
$$\equiv 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $p \wedge q' \equiv 0$ (önermenin değili) olduğu gösterilmelidir.

2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

İki Yönlü Koşullu Önerme

p ve q iki önerme olmak üzere, p ile q önermeleri aynı değerleri aldığında doğru, farklı değerler aldığında yanlış olan bileşik önermeye iki yönlü koşullu önerme denir ve $p \Leftrightarrow q$ biçiminde yazılarak p ancak ve ancak q diye okunur.

ÖRNEK 8

Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulalım:

$B = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ise $s(B) = 10$ dur.

$C = \{5, 6, 7, \ldots, 26, 27\}$ ise $s(C) = 23$ tür.

$D = \{10, 12, 14, \ldots, 48, 50\}$ ise $s(D) = 21$ dir.

$E = \{27, 31, 35, \ldots, 75, 79\}$ ise $s(E) = 14$ olur.

$F = \{5, 6, 8, 13, 25, 46, \ldots, 83\}$ kümesinin eleman sayısını bilemeyiz, çünkü küme iyi tanımlanmamıştır.

ÖRNEK 33

$$(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p]$$

önermesini sadeleştirelim.

Çözüm

$$\begin{aligned}(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p] &\equiv 0 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow p)\\ &\equiv 0 \Leftrightarrow p\\ &\equiv p'\end{aligned}$$

ÖRNEK 50

"Çift bir doğal sayının karesi de çifttir."

teoremini olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım.

Çözüm

Hipotez: p : "x çift doğal sayıdır."

p' : "x çift doğal sayı değildir."

Hüküm: q : "x^2 çift doğal sayıdır."

q' : "x^2 çift doğal sayı değildir."

Teorem : $p \Rightarrow q$: (x çift doğal sayı değil ise x^2 çift doğal sayıdır.)

İspat : $p \Rightarrow q$: (x çift doğal sayı değil ise x^2 çift doğal sayıdır.) teoreminin karşıt tersi;

$q' \Rightarrow p'$: (x^2 çift doğal sayı değil ise x çift doğal sayı değildir.) olup ispatlamamız gereken bu şekle dönüşmüştür.

q' : "x^2 çift doğal sayı değil" ise x^2 tek doğal sayıdır.

ise x tek doğal sayıdır.

ise x çift doğal sayı değildir.

ise p' doğrudur.

$q' \Rightarrow p'$ doğru olduğundan $p \Rightarrow q$ da doğrudur.

ÖRNEK 36

$(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q'$

bileşik önermesinin totoloji olduğunu

a. önermeler cebiri ile

b. doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

a. $(p' \vee q')' \vee (p' \wedge q) \vee q' \equiv ((p')' \wedge (q')') \vee (p' \wedge q) \vee q'$

$\equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)] \vee q'$

$\equiv [(q \wedge p) \vee (q \wedge p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge (p \vee p')] \vee q'$

$\equiv [q \wedge 1] \vee q'$

$\equiv q \vee q'$

$\equiv 1$

Verilen bileşik önerme totolojidir.

ÖRNEK 27

$p \Leftrightarrow (p \vee q)$

önermesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$p \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv [p \Rightarrow (p \vee q)] \wedge [(p \vee q) \Rightarrow p]$

$\equiv [p' \vee (p \vee q)] \wedge [(p \vee q)' \vee p]$

$\equiv [(p' \vee p) \vee q] \wedge [(p' \wedge q') \vee p]$

$\equiv (1 \vee q) \wedge [(p' \vee p) \wedge (q' \vee p)]$

$\equiv 1 \wedge [1 \wedge (q' \vee p)]$

$\equiv 1 \wedge (q' \vee p)$

$\equiv q' \vee p$

$\equiv q \Rightarrow p$

1. Doğrudan İspat Yöntemi

ÖRNEK 49

"İki tek sayının çarpımı tek sayıdır."

teoremi doğrudan ispat yöntemi ile ispatlayalım.

Çözüm

Teorem : x ve y tek sayı ise $x \cdot y$ tek sayıdır.

Hipotez : x ve y tek sayıdır.

Hüküm : $x \cdot y$ tek sayıdır.

İspat : $x = 2k + 1$ ve $y = 2p + 1$ olsun. $(k, p \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow x \cdot y = (2k + 1) \cdot (2p + 1)$

$\Rightarrow x \cdot y = 2k \cdot 2p + 2k + 2p + 1$

$\Rightarrow x \cdot y = 2(k \cdot p + k + p) + 1$

$\Rightarrow x \cdot y = 2t + 1 \quad (k \cdot p + k + p = t \in \mathbb{Z})$ olur.

$\Rightarrow 2t + 1$ tek sayı

$\Rightarrow x \cdot y$ tek sayıdır.

O hâlde, "İki tek sayının çarpımı tek sayıdır."

ÖRNEK 37

$[(p \wedge q') \vee p'] \wedge (p \wedge q)$

bileşik önermesinin çelişki olduğunu

a. önermeler cebiri ile

b. doğruluk tablosu ile gösterelim.

ÖRNEK 29

$p \Leftrightarrow q$: "Aynı düzlemdeki iki doğrunun birbirine paralel olması için gerek ve yeter koşul bu iki doğrunun kesişmemesidir." bileşik önermesi bir çift gerektirmedir.

Yani, $p \Leftrightarrow q \equiv 1$ dir.

Burada p ve q önermeleri birbirleri için hem yeter hem de gerek koşuldur.

3. Çelişki Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoreminin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$ nun değilinin yanlış olduğunu göstermeye dayanan ispat yöntemine **çelişki yöntemi** ile ispat denir.

$p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$

$\equiv p \wedge q'$

$\equiv 0$ dır.

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $p \wedge q' \equiv 0$ (önermenin değili) olduğu gösterilmelidir.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

Totoloji ve Çelişki

Kendisini oluşturan önermelerin bütün doğruluk değerlerine karşılık daima doğru (1) olan bileşik önermeye **totoloji**, daima yanlış (0) olan bileşik önermeye ise **çelişki** denir.

Örneğin, "Hava yağmurludur veya yağmurlu değildir." ifadesi bir **totolojidir**. Bunun yanında, "Yağmur hem yağıyor, hem de yağmıyor." ifadesi bir çelişki belirtir. Niçin?

p herhangi bir önerme olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. $p \vee p' \equiv 1$ (Totoloji)

b. $p \wedge p' \equiv 0$ (Çelişki)

c. $p \vee 1 \equiv 1$ (Totoloji)

d. $p \wedge 0 \equiv 0$ (Çelişki)

ÖRNEK 34

$[p' \wedge (p \vee q)] \vee p$

önermesinin bir totoloji olup olmadığını araştıralım.

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p' \wedge (p \vee q)$	$[p' \wedge (p \vee q)] \vee p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0

Tablodan, $[p' \wedge (p \vee q)] \vee p$ bileşik önermesinin, p ve q nun bütün dizilişleri için doğru (1) olduğu söylenemez.

O hâlde, $[p' \wedge (p \vee q)] \vee p$ **totoloji değildir.**

ÖRNEK 53

"Tek bir tam sayı ile çift bir tam sayının çarpımı, çift bir tam sayıdır." **teoremini deneme yöntemiyle ispatlayalım.**

Çözüm

$x = 3$ (tek sayı), $y = 4$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 3 \cdot 4 = 12$ (çift sayı)

$x = (-5)$ (tek sayı), $y = (-2)$ (çift sayı)

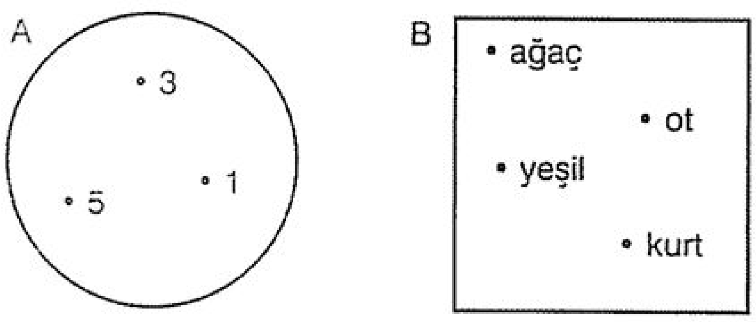
$\Rightarrow x \cdot y = (-5) \cdot (-2) = 10$ (çift sayı)

$x = 7$ (tek sayı), $y = (-6)$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 7 \cdot (-6) = -42$ (çift sayı)

$x = (-1)$ (tek sayı), $y = 2$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = (-1) \cdot 2 = -2$ (çift sayı) olduğundan teorem doğrudur.



2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10$, $s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \text{ dur.}$$

A kümesi üzerinde bir p(x) açık önermesi tanımlanıyor. A kümesinde p(x) i doğrulayan en az bir x elemanı varsa

$(\exists x \in A)\ p(x)$ veya $\exists x,\ p(x)$ yazılır.

Bazı, en az bir anlamlarına gelen $\exists$ sembolü **varlıksal niceleyicidir.**

Örneğin, p : "Bazı tam sayılar negatiftir." önermesini

$p(x) : \exists x \in \mathbb{Z},\ x < 0$ şeklinde yazabiliriz.

Bu durumda, $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere önerme, $\exists x,\ p(x)$ biçiminde ifade edilerek, "bazı x ler için p (x) tir." veya "en az bir x için p (x)" olarak okunabilir.

"$\exists x,\ p(x)$" önermesinin doğru olması için çözüm kümesi boş olmamalıdır.

ÖRNEK 40

$q(x, y)$: "$x, y \in \mathbb{N},\ x + y = 4$"

açık önermesinin doğruluk kümesini bulalım.

Çözüm

Toplamları 4 olan doğal sayı ikilileri verilen iki değişkenli açık önermeyi sağlar. Doğal sayılarda,

$q(0, 4) \equiv q(1, 3) \equiv q(2, 2) \equiv q(3, 1) \equiv q(4, 0) \equiv 1$

olduğundan q açık önermesinin doğruluk kümesi

$D = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ olur.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat denir.**

Açık Önermeler

Doğruluğu içindeki değişkene bağlı olan önermelere **açık önerme** veya **önerme fonksiyonu** denir.

Bir x değişkeni ile verilen p açık önermesi p(x) ile gösterilir.

Örneğin, p (x): “x uçan hayvandır.” bir açık önermedir. x yerine kuş yazarsak, p(kuş): “kuş uçan hayvandır.” x yerine kaplan yazarsak, p(kaplan): “kaplan uçan hayvandır.” olur.

Burada, p(kuş) = 1 ve p(kaplan) = 0 yazabiliriz.

ÖRNEK 53

"Tek bir tam sayı ile çift bir tam sayının çarpımı, çift bir tam sayıdır." **teoremini deneme yöntemiyle ispatlayalım.**

Çözüm

$x = 3$ (tek sayı), $y = 4$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 3 \cdot 4 = 12$ (çift sayı)

$x = (-5)$ (tek sayı), $y = (-2)$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = (-5) \cdot (-2) = 10$ (çift sayı)

$x = 7$ (tek sayı), $y = (-6)$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = 7 \cdot (-6) = -42$ (çift sayı)

$x = (-1)$ (tek sayı), $y = 2$ (çift sayı)

$\Rightarrow x \cdot y = (-1) \cdot 2 = -2$ (çift sayı) olduğundan teorem doğrudur.

Herhangi bir E evrensel kümesi üzerinde tanımlanmış bir p açık önermesini doğrulayan kümeye açık önermenin doğruluk (çözüm) kümesi denir. Doğruluk kümesinin her bir elemanına ise **çözüm** adı verilir.

Doğruluk kümesinin her bir elemanı p(x) açık önermesini sağlar. Söz gelimi,

E = {0 ,1 ,2 , 5, 6} kümesinde,
p (x): “2x -1 < 7” açık önermesinin doğruluk kümesi

$2x - 1 < 7 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$ yardımıyla

$D = \{0, 1, 2\}$ olur.

$p(x)$: "$2x - 1 < 7$ için,

$p(0)$: "$2 \cdot 0 - 1 = -1 < 7$" $\quad (p(0) \equiv 1)$

$p(1)$: "$2 \cdot 1 - 1 = 1 < 7$" $\quad (p(1) \equiv 1)$

$p(2)$: "$2 \cdot 2 - 1 = 3 < 7$" $\quad (p(2) \equiv 1)$

$\{5, 6\}$ kümesinin elemanları ise, $p(x)$ önermesini sağlamaz.

$p(5)$: "$2 \cdot 5 - 1 = 9 \nless 7$" $\quad (p(5) \equiv 0)$

$p(6)$: "$2 \cdot 6 - 1 = 11 \nless 7$" $\quad (p(6) \equiv 0)$

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme, $\varnothing$ ya da { } biçiminde gösterilir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır. $s(\varnothing) = 0$

$\{\varnothing\}$ veya {{ }} kümeleri boş küme değildir.

ÖRNEK 46

Aşağıda tanımları yanlış yapılmış terimleri inceleyerek doğru tanımlarını yapınız.

a. Üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik olan dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan sayılara tek sayı denir.

Çözüm

a. **Aynı doğru üzerinde bulunmayan farklı** üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir **dik** üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik ve **kenarları eşit olan** dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan **tam sayılara** tek sayı denir.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

Niceleyiciler

Günlük konuşma dilinde ve matematiksel ifadelerde “bazı”, “her”, “bir tek” gibi niceleyicileri sık sık kullanırız. “Her zaman doğruyu söylerim.” “Bazı günler kırlara çıkarım.” “Karesi negatif sayı olan hiç bir tam sayı yoktur.”

Önüne geldiği elemanların niceliğini (çokluğunu) belirten, “her” ve “bazı" sözcüklerine **niceleyici** adı verilir.

ÖRNEK 46

Aşağıda tanımları yanlış yapılmış terimleri inceleyerek doğru tanımlarını yapınız.

a. Üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik olan dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan sayılara tek sayı denir.

Çözüm

a. **Aynı doğru üzerinde bulunmayan farklı** üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir **dik** üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik ve **kenarları eşit olan** dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan **tam sayılara** tek sayı denir.

ÖRNEK 8

Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulalım:

$B = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ise $s(B) = 10$ dur.

$C = \{5, 6, 7, \ldots, 26, 27\}$ ise $s(C) = 23$ tür.

$D = \{10, 12, 14, \ldots, 48, 50\}$ ise $s(D) = 21$ dir.

$E = \{27, 31, 35, \ldots, 75, 79\}$ ise $s(E) = 14$ olur.

$F = \{5, 6, 8, 13, 25, 46, \ldots, 83\}$ kümesinin eleman sayısını bilemeyiz, çünkü küme iyi tanımlanmamıştır.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

3. Çelişki Yöntemi ile İspat

$p \Rightarrow q$ teoreminin doğruluğunu göstermek için $p \Rightarrow q$ nun değilinin yanlış olduğunu göstermeye dayanan ispat yöntemine **çelişki yöntemi ile ispat** denir.

$$p \Rightarrow q \equiv 1 \text{ iken } (p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$$
$$\equiv p \wedge q'$$
$$\equiv 0 \text{ dır.}$$

Buna göre, $p \Rightarrow q \equiv 1$ iken $p \wedge q' \equiv 0$ (önermenin değili) olduğu gösterilmelidir.

$\exists$ sembolü "bir tek", "bazı" veya "en az", anlamına gelir.

$\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 = 0$ ifadesi "Karesi sıfır olan bir tek tam sayı vardır." demektir.

ÖRNEK 42

Aşağıdaki önermeleri kurallı cümle biçiminde ifade ederek doğruluk değerlerini bulalım.

a. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$

b. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$

Çözüm

a. $n^2 < 3$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar, 0 ile 1 dir.

"$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < 3$" ifadesi, "bazı doğal sayıların karesi 3 ten küçüktür." demektir. Bu durumda bu önerme doğrudur. Doğruluk kümesi de $D = \{0, 1\}$ dir.

b. Hiçbir reel sayının karesinin negatif olamayacağını biliyoruz. $x^2 + 1 = 0$ ise $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan reel (gerçek) sayı yoktur. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$" ifadesi, "en az bir x reel (gerçek) sayı için $x^2 + 1 = 0$ dır." demektir. Bu durumda bu önerme yanlıştır. Doğruluk kümesi de $D = \varnothing$ dir.

Niceleyicilerin Değili

1. "p(x) açık önermesi A kümesinin bütün elemanları için doğru değildir." ifadesi

   "A nın bazı elemanları için p(x) yanlıştır." anlamına gelir.

$$[\forall x,\ p(x)]' \equiv \exists x,\ p'(x)$$

2. "p(x) açık önermesi A nın bir elemanı için bile doğru değildir." ifadesi

   "A kümesinin bütün elemanları için p(x) yanlıştır." demektir.

$$[\exists x,\ p(x)]' \equiv \forall x,\ p'(x)$$

"Bütün reel sayıların kareleri pozitiftir." önermesini düşününüz. Verilen bu önermenin değili; "Bazı reel sayıların kareleri pozitif değildir." veya "Karesi pozitif olmayan en az bir reel sayı vardır." biçimindedir.

Şimdi de "Bazı reel sayıların kübü negatiftir." önermesini inceleyim. Bu önermenin değili; "Bütün reel sayıların küpü pozitif veya sıfırdır." biçimindedir.

Verilen örneklerden anlaşılacağı gibi, içinde evrensel niceleyici bulunan (∀) bir önermenin değili varlıksal niceleyici (∃) içerir. Bu ifadenin karşıtı da doğrudur.

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10,\ s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \text{ dur.}$$

ÖRNEK 45

$[\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - x - 1) < 0] \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 = 0]$

önermesine denk önermeyi ve değilini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p : [\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - x - 1) < 0]$ ve $q : [\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 = 0]$ olsun.

$(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$ olacağından önermenin değili:

$$[\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - x - 1) < 0] \wedge [\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 1 = 0]'$$

$$[\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - x - 1) < 0] \wedge [\exists x \in \mathbb{R}, 3x + 1 \neq 0]$$ olur.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olduğu için

$p \Rightarrow q \equiv 1$ ve değili $(p \Rightarrow q)' \equiv 0$ olur.

İspat Yöntemleri

TANIM

Bir terimin tanımını yapmak, bu terimin kapsamına giren her şeyi eksiksiz belirten bir önerme oluşturmak demektir. Oluşturulan bu önerme, gayet sade ve açık olarak ifade edilmelidir.

Bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklamaya **tanım** denir.

Tanım, dil içerisinde ve günlük hayatta"... nedir?" sorusuna verilen cevaptır. Tanımlar yalnızca bir fikir ya da tasarım değildir.

Bunların herkese dil aracılığıyla bildirilmesi, anlamlarının bilinmesi gerekir. Dolayısıyla, belli bir konu, araştırma, ya da bilim dalında belirlenen tanımlar anlam itibarıyla herkese, her zaman ve her yerde aynı şeyi ifade etmeli, eksik ya da gereksiz sözcük bulundurmamalıdır.

Örneğin, " Belirli bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine çember denir." tanımı eksik ve dolayısı ile yanlıştır. Çünkü, belirlenen noktanın düzlemde mi yoksa uzayda mı olduğu söylenmemiştir. Eğer belirlenen nokta düzlemde ise tanım doğrudur, yani oluşan şekil çemberdir. Fakat belirlenen nokta uzayda ise oluşan şekil bir küre olacaktır.

ÖRNEK 46

Aşağıda tanımları yanlış yapılmış terimleri inceleyerek doğru tanımlarını yapınız.

a. Üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik olan dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan sayılara tek sayı denir.

Çözüm

a. **Aynı doğru üzerinde bulunmayan farklı** üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle üçgen denir.

b. Bir **dik** üçgende en uzun kenara hipotenüs denir.

c. Açıları dik ve **kenarları eşit olan** dörtgene kare denir.

d. 2 nin katı olmayan **tam** sayılara tek sayı denir.

Aksiyon ve Teorem

Doğruluğu ispatlanmadan (ispatsız olarak) doğru olduğu kabul edilen önermelere aksiyom (postulat) denir.

Sezgisel olarak algıladığımız fakat daha önceden bilinen tanımlara ve önermelere dayalı olarak ispatlayamadığımız bazı gerçekler vardır. Bu gerçekleri, sebebini aramadan doğru kabul etmek gerekir. Aksi takdirde, hiçbir bilim dalında hiçbir önermenin doğru olduğunu gösteremeyiz.

Örneğin,

p : "Her doğru parçası kendisine eşittir."

q : "Farklı iki noktadan geçen bir tek doğru vardır."

r : "x ve y sayıları için x = y ise y = x tir."

önermelerini doğru kabul edeceğiz. Bu önermeler birer aksiyomdur.

Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere teorem denir.

p hipotezi doğru olan p => q gerektirmesine teorem denir.

Yani teoremde hem hipotezin (p), hem de hükmün (q) doğru olması gerekir.

Teoremin hipotezinden yola çıkıp hükmüne ulaşmaya teoremi ispatlamak denir.

Yani teoremde verilen kısma hipotez (p), ispatlanacak kısma da hüküm (q) denir.

Teoremler doğruluğunu ispatlayabildiğimiz önermelerdir. Bir teoremin ispatında kendinden önce gelen teoremlerde kullanılır.

İspat yapılırken atılan her adım, en az bir tanıma, aksiyoma veya teoreme dayandırılmalıdır.

Aksiyom ile teorem arasındaki en önemli fark, aksiyomun doğruluğunun ispatlanmadan kabul edilmesi, teoremin ise doğruluğunun ispat edilebilmesidir

ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

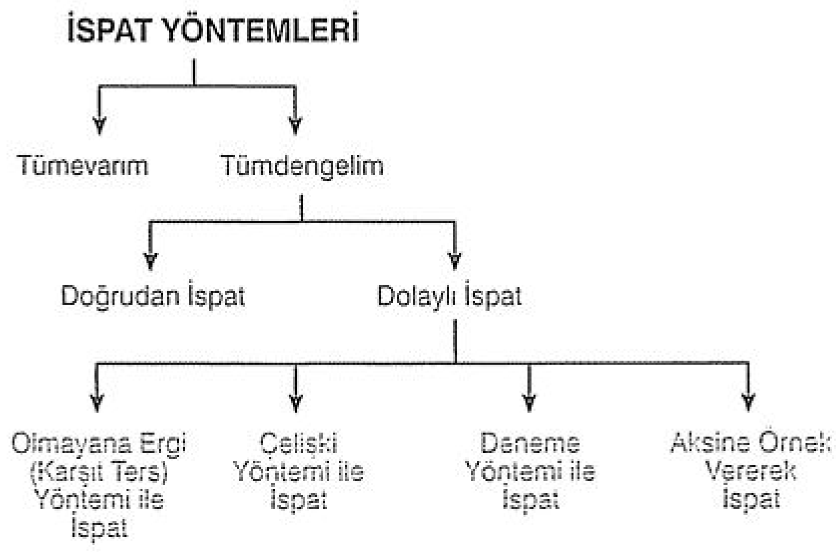
Çözüm

$x = 10,\ s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19$ dur.

İspat Yöntemleri

Doğruluğunu göstermek zorunda olduğumuz önermelere teorem denir. Farklı ispatlama yöntemleri kullanılarak teoremler ispatlanabilir. Yöntem ne olursa olsun teoremin doğruluğunun gösterilmesi gerekir. Matematikçiler teoremleri ispatlarken kullandıkları değişik yöntemleri aşağıdaki şemada olduğu gibi isimlendirmişlerdir.



Tümevarım yöntemini daha sonra göreceğiz. Burada "Tümdengelim" yöntemini işleyeceğiz.

p => q teoremi için p nin doğru olduğunu kabul ederek q nun doğru olduğunu göstermeye doğrudan ispat yöntemi denir.

ÖRNEK 54

"x bir asal sayı ise tektir."

önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösterelim.

Çözüm

x = 2 nin asal ve çift sayı olduğunu söylemek yeterlidir. Bu örnekle "x bir asal sayı ise tektir." önermesinin yanlış olduğu ispatlanmış olur.

2. Olmayana Ergi (Karşıt Ters) Yöntemi ile İspat

Bu ispat yönteminde $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkliğinden faydalanılır. Bazı problemlerde $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmak yerine $q' \Rightarrow p'$ in ispatını yapmak daha kolaydır. Verilen teoremin karşıt tersi alındıktan sonra uygulanan ispat yöntemi, genellikle doğrudan ispat yöntemidir.

$p \Rightarrow q$ önermesi $q' \Rightarrow p'$ önermesine denk olduğundan

$p \Rightarrow q$ önermesini ispat etmek yerine $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispat edebiliriz. Bu yönteme **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

Buna göre, bir teoremin doğrudan ispatı yerine karşıt tersinin ispatlanması yöntemine **olmayana ergi** (karşıt ters) **yöntemiyle ispat** denir.

ÖRNEK 50

"Çift bir doğal sayının karesi de çifttir."

teoremini olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım.

Çözüm

Hipotez: p : "x çift doğal sayıdır."

p' : "x çift doğal sayı değildir."

Hüküm: q : "x^2 çift doğal sayıdır."

q' : "x^2 çift doğal sayı değildir."

Teorem : $p \Rightarrow q$: (x çift doğal sayı değil ise x^2 çift doğal sayıdır.)

İspat : $p \Rightarrow q$: (x çift doğal sayı değil ise x^2 çift doğal sayıdır.) teoreminin karşıt tersi;

$q' \Rightarrow p'$: (x^2 çift doğal sayı değil ise x çift doğal sayı değildir.) olup ispatlamamız gereken bu şekle dönüşmüştür.

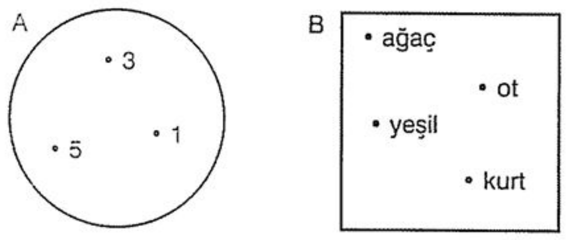
q' : "x^2 çift doğal sayı değil" ise x^2 tek doğal sayıdır.

ise x tek doğal sayıdır.

ise x çift doğal sayı değildir.

ise p' doğrudur.

$q' \Rightarrow p'$ doğru olduğundan $p \Rightarrow q$ da doğrudur.



ÖRNEK 10

Aşağıdaki kümeler sonsuz kümelerdir.

$B = \{x \mid x \text{ reel sayıdır ve } -5 < x < 5\}$

$C = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

4. Deneme Yöntemi ile İspat

Deneme yöntemi ile ispat yöntemi, değişkeni farklı değerler alan bir önermede kullanılabilir. Bu değerler ayrı ayrı yerlerine yazılarak önermenin doğruluğu kontrol edilir.

ÖRNEK 7

$A = \{10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$

kümesinin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

$x = 10$, $s = 100$ ve $r = 5$ olduğundan;

$$s(A) = \frac{s-x}{r} + 1 = \frac{100-10}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \text{ dur.}$$

5. Aksine Örnek Vererek İspat

Verilen bir önermenin doğru olmadığını gösteren en az bir değer bulunarak bu önermenin yanlış olduğu ispatlanmış olur. Bu yöntem genellikle p => q şeklindeki bir önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için kullanılır.

ÖRNEK 54

"x bir asal sayı ise tektir."

önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösterelim.

Çözüm

$x = 2$ nin asal ve çift sayı olduğunu söylemek yeterlidir. Bu örnekle "x bir asal sayı ise tektir." önermesinin yanlış olduğu ispatlanmış olur.