9.Sınıf Matematik Sayı Kümeleri Konu Anlatımı

**Doğal Sayılarda İşlemler**

İnsanoğlu, tarih boyunca sayılar dünyası ile iç içe yaşamıştır. En basit anlayışla sayıları, sahip olduğumuz nesnelerin niceliğini (miktar, büyüklük) karşılaştırmada bir araç olarak kullanırız. Bununla birlikte sayı kavramını gerçek manada tanımlamak oldukça zordur.

Bu bölümde ayrıntılarını öğreneceğimiz ve N sembolüyle ifade edilen doğal sayılar kümesi, sayma işleminin temelini oluşturur.

Sayma sayıları sistemi 1,2, 3 ,4 ,... sayılarından meydana gelmektedir. Bu sayı sisteminin kurgusu oldukça basit bir yapıya dayanır. Birinci sayı 1, ikinci sayı, birinciye bir eklenerek elde edilen 2, üçüncü sayı, İkinciye bir eklenerek elde edilen 3 ,...

Bu sistem, sonraları içinde hiçbir nesne barındırmayan kümeleri de kapsama fikriyle genişletildi. Örneğin, "Güneşte yaşayan insanlar" kümesinin 0 sembolüyle ifade edilmesi, bu genişlemenin bir örneğidir. Sayma sayıları kümesine boş kümenin eleman sayısı olan sıfırın (0) eklenmesiyle doğal sayılar kümesi oluşturulmuştur. Her kümenin bir nicelik sayısı olduğunu hatırlayınız. Boş kümenin nicelik sayısı 0 dır.

Buradan $s(\varnothing) = 0$ yazabiliriz. $\{0\}$ kümesinin nicelik sayısı ise 1 dir.

Benzer şekilde, $\{0, 1\}$ kümesi için, $s(\{0, 1\}) = 2$ dir.

Genel olarak, $s(\{0, 1, 2, 3, \ldots, k\}) = k + 1$ yazılabilir.

**Doğal Sayılarda Toplama İşlemi**

Sonlu kümelerin eleman sayılarını belirten sayılara doğal sayılar denir ve N sembolüyle gösterilir.

N = {0 ,1 ,2 , 3, 4, 5 ,.... n, n + 1 ,...}

Doğal sayılar kümesinin, sayma sayıları kümesine 0 eklenmesiyle oluşturulduğunu öğrendik. Bu durumda, sayma sayıları kümesini N+ olarak ifade edip,

N+ = {1 ,2 ,3 , 4, 5 ,.... n, n + 1 ,...} yazabiliriz.

Doğal sayılar kümesini

$\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$

şeklinde gösterebiliriz.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $2n$ ifadesi çift doğal sayıları (Ç) ve $2n + 1$ ifadesi de tek doğal sayıları (T) belirtir.

$Ç = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$

$T = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots\}$

Sıfırdan farklı hiçbir doğal sayının doğal sayılar kümesinde, toplama işlemine göre tersi yoktur.

Yani, **x ∈ N** ve **x ≠ 0** olmak üzere **x + y = 0** şartını sağlayan hiçbir y doğal sayısı yoktur.

**ÖZELLİK** :
a, b, c ∈ N için

- **Kapalılık özelliği** : a + b ∈ N dir. Herhangi iki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayıdır.
- **Değişme özelliği** : a + b = b + a
- **Birleşme özelliği** : a + ( b + c) = (a + b ) + c = a + b + c . Herhangi üç doğal sayı toplanırken, parantezlerin yerinin değiştirilmesi ya da tamamen kaldırılması sonucu değiştirmez.
- **Etkisiz Eleman** : a + 0 = 0 + a = a . Toplama işleminin birim elemanı 0 dır.

- **Sadeleştirme özelliği** : a + c = b + c <=> a = b

**Doğal Sayılarda Çarpma İşlemi**

Doğal sayılarda çarpma işlemi, ardışık toplama işleminin kısa yoldan yapılmasıdır.

Örneğin 5 tane 3 ün toplamı

(3 + 3 + 3 + 3 + 3), 5 kere 3 (5 . 3) şeklinde ifade edilebilir.

3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5- 3 = -15

<u>ÖZELLİK</u> :

a, b, c ∈ N için

- **Kapalılık özelliği** : a . b ∈ N dir. Herhangi iki doğal sayının çarpımı yine bir doğal sayıdır.
- **Değişme özelliği** : a . b = b. a
- **Birleşme özelliği** : a . (b . c) = (a . b ) . c = a . b . c . Herhangi üç doğal sayının çarpımında, parantezlerin yerlerinin değiştirilmesi ya da tamamen kaldırılması çarpımın sonucunu değiştirmez.
- **Etkisiz Eleman** : a . 1 = 1 . a = a . Çarpma işleminin birim elemanı 1 dir.
- **Yutan Eleman** : a . 0 = 0 . a = 0 . Çarpma işleminin yutan elemanı sıfırdır.
- **Sadeleştirme Özelliği** :

c ≠ 0 olmak üzere

a . c = b . c <=> a = b ve

c . a = c . b <=> a = b

Çarpma işleminde sıfırla sadeleştirme yapılamaz.

- **Çarpmanın toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği**

a . (b + c) = a . b + a . c

(b + c) . a = b . a + c . a

Çarpmanın toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

- **Çarpmanın çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği**

a . ( b - c ) = a . b - a . c

(b - c) . a = b. a - c . a

Çarpmanın çıkarma işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

- Doğal sayılar kümesinde 1 den başka hiçbir doğal sayının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

ÖRNEK 1

$a, b, c \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$a \cdot b \cdot c = 1$$

**olduğuna göre, $2a + 3b - 4c$ kaçtır?**

Çözüm

$a \cdot b \cdot c = 1$ denkleminin doğal sayılardaki çözümünde

$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$ olmalıdır.

O zaman, $2a + 3b - 4c = 2 + 3 - 4 = 1$ olur.

ÖRNEK 2

a, b, c birbirinden farklı birer doğal sayı ve

$$a \cdot b \cdot c = 6$$

**olduğuna göre, $a + b + c$ kaçtır?**

Çözüm

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

olduğuna göre, $a + b + c = 1 + 2 + 3$

$= 6$ dır.

ÖRNEK 3

a, b, c birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere;

$$a + b = 1$$

$$b + c = 2$$

**olduğuna göre, $2c + a - b$ kaçtır?**

Çözüm

$a + b = 1$ ise $(a = 1$ ve $b = 0)$ veya $(a = 0$ ve $b = 1)$

$b + c = 2$ ise $(b = 0$ ve $c = 2)$ veya $(b = 2$ ve $c = 0)$

a, b ve c farklı doğal sayılar olduğu için,

$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 2$ dir.

Buna göre, $2c + a - b = 4 + 1 - 0 = 5$ olur.

ÖRNEK 4

$$7x + 11 = 46$$

**olduğuna göre, x i bulalım.**

Çözüm

$7x + 11 = 46$

$7x + 11 = 35 + 11$

$7x = 35$ (toplama işleminde sadeleştirme özelliği)

$7 \cdot x = 7 \cdot 5$

$x = 5$ (çarpma işleminde sadeleştirme özelliği)

**Doğal Sayılarda Çözümleme**

Doğal sayıları göstermek için kullanılan 0 ,1 ,2 ,3 ,4 , 5, 6,7, 8, 9 sembollerinin her birine rakam denir.

Bir doğal sayıda kaç tane rakam varsa sayı o kadar basamaklıdır.

Örneğin; 3, bir basamaklı; 27, iki basamaklı ve 409 da üç basamaklı sayılardır.

Sayıları oluşturan rakamların sayı değeri ve basamak değeri olmak üzere iki değeri vardır.

Örneğin, 409 sayısındaki 4 ün; sayı değeri 4, basamak değeri ise 400 dür.

3 0 2 6 7

- 7 → Birler ($10^0$) basamağı
- 6 → Onlar ($10^1$) basamağı
- 2 → Yüzler ($10^2$) basamağı
- 0 → Binler ($10^3$) basamağı
- 3 → On binler ($10^4$) basamağı

a, b, c, d birer rakam olmak üzere, İki basamaklı ab sayısı;

ab = 10 . a + b,

Üç basamaklı abc sayısı;

abc = 100 . a + 10 . b + c,

Dört basamaklı abcd sayısı;

abcd = 1000 . a + 100 . b + 10 . c + d

şeklinde çözümlenir.

ÖRNEK 5

**Aşağıdaki çözümlemeleri inceleyiniz.**

- $51 = 5 \cdot 10 + 1$
- $237 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7$
- $4089 = 4 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9$
- $10\,703 = 1 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3$

ÖRNEK 6

İki basamaklı bir sayı, rakamları toplamının iki katına eşittir.

**Bu sayıyı bulalım.**

Çözüm

Sayımız ab olsun. Bu durumda,

$ab = 10a + b$ yazabiliriz.

ab sayısı, rakamları toplamının iki katına eşit olduğuna göre,

$10a + b = 2(a + b)$

$10a + b = 2a + 2b$

$8a = b$ dir.

a ve b rakam olduğu için, bu denklemin tek çözümü

$a = 1$ ve $b = 8$ olur.

Bu durumda $ab = 18$ bulunur.

**Doğal Sayılarda Kuvvet Kavramı**

$a, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$a + a = 2a$$
$$a + a + a = 3a$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ tane}} = n \cdot a \quad \text{dır.}$$

Ayrıca,

$$a \cdot a = a^2$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} = a^n \quad \text{dir.}$$

Görüldüğü gibi, $n \cdot a \neq a^n$ dir.

$a, n \in N$ ve $n \neq 0$ olmak üzere, n tane a nın çarpımından elde edilen sayıya a nın n. kuvveti denir.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}}$$

Bu ifadede, a sayısına **taban**, n ye **üs** denir.

ÖRNEK 13

$5^1$ ifadesi "5 üssü 1" veya "5 in 1. kuvveti",

$5^2$ ifadesi "5 üssü 2" veya "5 in 2. kuvveti" veya "5 in karesi",

$5^3$ ifadesi "5 üssü 3" veya "5 in 3. kuvveti" veya "5 in küpü",

$5^4$ ifadesi "5 üssü 4" veya "5 in 4. kuvveti",

$5^5$ ifadesi "5 üssü 5" veya "5 in 5. kuvveti",

...

$5^n$ ifadesi "5 üssü n" veya "5 in n. kuvveti" şeklinde okunur.

$a, b, c, d, e, m, n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise;

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $c \cdot a^m + d \cdot a^m - e \cdot a^m = (c + d - e) \cdot a^m$ dir.

## ÖRNEK 14

**Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

- $5^2 = 25$ (5 üssü 2)
- $0^{26} = 0$ (0 üssü 26)
- $2^4 = 16$ (2 üssü 4)
- $2^5 = 32$ (2 üssü 5)
- $2^6 = 64$ (2 üssü 6)
- $2^7 = 128$ (2 üssü 7)
- $3^3 = 27$ (3 üssü 3)
- $3^4 = 81$ (3 üssü 4)
- $3^5 = 243$ (3 üssü 5)

## ÖRNEK 15

**Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

- $8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5$
- $11^5 \cdot 11^6 = 11^{5+6} = 11^{11}$
- $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$

## ÖRNEK 16

**Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

- $10^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$
- $35^3 = (5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$
- $30^8 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8$

## ÖRNEK 17

**Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

- $(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}$
- $(13^7)^5 = 13^{7 \cdot 5} = 13^{35}$
- $((2^3)^4)^5 = 2^{3 \cdot 4 \cdot 5} = 2^{60}$
- $3^8 \cdot (3^5)^6 = 3^8 \cdot 3^{5 \cdot 6} = 3^8 \cdot 3^{30} = 3^{8+30} = 3^{38}$

## ÖRNEK 18

**Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

- $8 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^6 - 3 \cdot 5^6 = (8 + 2 - 3) \cdot 5^6 = 7 \cdot 5^6$
- $4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^2 = (4 + 2 - 5) \cdot 3^2 = 3^2$
- $$\begin{aligned} 10 \cdot 2^9 + 5 \cdot 2^9 - 7 \cdot 2^9 &= (10 + 5 - 7) \cdot 2^9 \\ &= 8 \cdot 2^9 \\ &= 2^3 \cdot 2^9 \\ &= 2^{12} \end{aligned}$$

ÖRNEK 19

$16^5 \cdot 32^7 - 2^{55}$

**işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

$16 = 2^4$ ve $32 = 2^5$ eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} 16^5 \cdot 32^7 - 2^{55} &= (2^4)^5 \cdot (2^5)^7 - 2^{55} \\ &= 2^{4 \cdot 5} \cdot 2^{5 \cdot 7} - 2^{55} \\ &= 2^{20} \cdot 2^{35} - 2^{55} \\ &= 2^{20+35} - 2^{55} \\ &= 2^{55} - 2^{55} \\ &= 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$ dir.
2. $0^0$ ifadesi tanımsızdır.
3. $\forall a \in \mathbb{N}^+$ için $a^0 = 1$, $a^1 = a$ ve $0^a = 0$ dır.
4. $\forall a \in \mathbb{N}^+$ için $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$

ÖRNEK 20

$2^n = (2^4)^3 \cdot 8^3 \cdot 32$

**olduğuna göre, n kaçtır?**

Çözüm

$2^n = (2^4)^3 \cdot 8^3 \cdot 32$

$2^n = 2^{12} \cdot (2^3)^3 \cdot 2^5$

$2^n = 2^{12} \cdot 2^9 \cdot 2^5$

$2^n = 2^{12+9+5}$

$2^n = 2^{26}$ ise

$n = 26$ dır.

ÖRNEK 21

$m \cdot 4^{10} = 3 \cdot 4^9 + 7 \cdot 4^9 - 6 \cdot 4^9$

**olduğuna göre, m kaçtır?**

Çözüm

$m \cdot 4^{10} = 3 \cdot 4^9 + 7 \cdot 4^9 - 6 \cdot 4^9$

$m \cdot 4^{10} = (3 + 7 - 6) \cdot 4^9$

$m \cdot 4^{10} = 4 \cdot 4^9$

$m \cdot 4^{10} = 4^{1+9}$

$m \cdot 4^{10} = 4^{10}$ ise,

$m = 1$ dir.

ÖRNEK 22

$$3^{3a+1} = m$$

**olduğuna göre, $27^{a+1}$ ifadesinin m cinsinden eşitini bulalım.**

*Çözüm*

$$3^{3a+1} = m \ ... \ (*)$$

$$27^{a+1} = (3^3)^{a+1}$$
$$= 3^{3a+3}$$
$$= 3^{2+3a+1}$$
$$= 3^2 \cdot 3^{3a+1}$$
$$= 9 \cdot m \text{ olur.}$$

Öyleyse, $27^{a+1}$ ifadesi 9m ye eşittir.

**Sayı Sistemleri**

Bir sayının tanımlandığı sayma sistemine **sayının tabanı** denir.

Örneğin, $(9078)_{10}$ sayısının tabanı 10 dur.

$(22004)_6$ sayısının tabanı 6 dır.

$(1101)_2$ sayısının tabanı 2 dir.

Doğal sayıları ifade ederken şimdiye kadar 10 luk tabanı kullandık. Yani her bir basamakta rakamların basamak değerleri 10 kat arttığından, basamakları birler, onlar, yüzler, binler, on binler, şeklinde adlandırdık.

Bir doğal sayı farklı tabanlarda farklı rakamlarla da ifade edilebilir. Sayıları farklı tabanlarda ifade etmeye sayı sistemleri denir.

10 luk tabandan başka bir tabanda yazılmış sayının basamakları tabanın kuvvetleri kadar artar. Başka tabandaki bir sayının her bir rakamı basamak değeriyle çarpılarak (çözümleme yolu ile) 10 luk tabandaki değeri bulunabilir. Taban aritmetiğini daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki etkinliği inceleyelim.

**Herhangi Bir Tabanda Verilen Bir Sayıyı 10 luk Tabanda Yazma**

Herhangi bir tabanda verilen bir sayıyı onluk tabana çevirmek için rakamların basamak değerleri kullanılarak çözümleme yapılır.

ÖRNEK 24

$(1101)_2$

**sayısının 10 luk tabandaki eşitini bulalım.**

*Çözüm*

$$(1\ 1\ 0\ 1)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 8 + 4 + 0 + 1$$
$$= 13$$

→ $2^0$ lar (birler) basamağı
→ $2^1$ ler (ikiler) basamağı
→ $2^2$ ler (dörtler) basamağı
→ $2^3$ ler (sekizler) basamağı

ÖRNEK 26

3 tabanındaki

$(1221)_3$

**sayısının, 10 tabanındaki eşitini bulalım.**

*Çözüm*

$$\begin{aligned}(1221)_3 &= 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0\\ &= 1\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 + 1\\ &= 27 + 18 + 6 + 1\\ &= 52\end{aligned}$$

**10 luk Tabandaki Bir Sayıyı Başka Tabanda Yazma**

10 tabanında verilen bir sayı, başka bir tabana çevrilirken, verilen sayı ardışık olarak çevrilmek istenen tabana bölünür. Bu bölme işlemine bölüm 0 (sıfır) olana kadar devam edilir. En son elde edilen kalan, istenen sayının en solundaki rakam olacak şekilde, kalanlar sırasıyla sayının rakamlarını oluşturur.

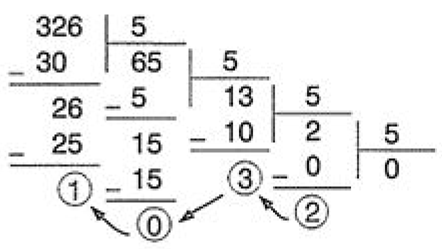
ÖRNEK 27

**326 sayısının 5 lik tabandaki eşitini bulalım.**

*Çözüm*

**1. Yol**

326 sayısını 5 ile sürekli böldüğümüzde elde edilen kalanları tersten yazarsak,



$326 = (2301)_5$ bulunur.

**2. Yol**

5 in doğal sayı kuvvetleri: 1, 5, 25, 125, 625, ... olduğuna göre,

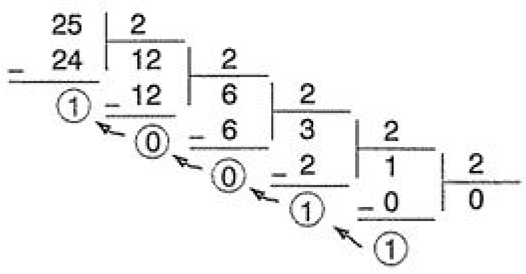
$326 = 2\cdot 125 + 3\cdot 25 + 0\cdot 5 + 1\cdot 1$

$= (2301)_5$ şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK 28

**25 sayısının 2 lik tabandaki eşitini bulalım.**

*Çözüm*



$25 = (11001)_2$ bulunur.

**UYARI** :

1. n tabanında kullanılan rakamlar n sayısından küçük olmalıdır.

2. n bir taban olmak üzere $n > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ dir.

ÖRNEK 30

x bir sayı tabanı olmak üzere,

$(301)_x = 244$

**olduğuna göre, x i bulalım.**

Çözüm

$(301)_x = 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = 3 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 = 3x^2 + 1$

olduğuna göre,

$$(301)_x = 244$$
$$3x^2 + 1 = 244$$
$$3x^2 = 243$$
$$x^2 = 81$$
$$x = \pm 9 \text{ dur.}$$

Tabanın 1 den büyük bir doğal sayı olması gerektiğinden,

$x = 9$ olur.

**Sayı Sistemlerinde İşlemler**

Bütün sayılar aynı tabanda olmak şartıyla değişik sayı tabanlarında da toplama, çıkarma, çarpma işlemleri yaparken 10 luk tabandakine benzer işlemler yapılır.

Bunun için toplama ve çarpma işlemlerinde karşılaşılan, tabana eşit veya daha büyük sayılar, tabanın katları kadar elde olarak diğer basamağa ilave edilir. Çıkarma işleminde soldaki basamaktan getirilen 1 in değeri tabanın sayı değeri kadardır.

ÖRNEK 33

8 ve 5 sayı tabanını göstermek üzere,

$(222)_8 - (222)_5$

**farkının , 10 tabanındaki eşitini bulalım.**

Çözüm

$$(222)_8 = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$$
$$= 2 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 1$$
$$= 128 + 16 + 2$$
$$= 146 \ \ldots \ (*)$$
$$(222)_5 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$
$$= 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1$$
$$= 50 + 10 + 2$$
$$= 62 \ \ldots \ (**)$$
$$(222)_8 - (222)_5 = 146 - 62 = 84 \text{ tür.}$$

ÖRNEK 37

**Aşağıda verilen işlemleri inceleyiniz.**

$$\begin{array}{r} (345)_7 \\ +\ (526)_7 \\ \hline (1204)_7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (213)_4 \\ -\ (21)_4 \\ \hline (132)_4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (243)_6 \\ +\ (243)_6 \\ \hline (530)_6 \end{array}$$

**Asal Sayılar**

Bazı doğal sayıları birçok doğal sayının çarpımı biçiminde farklı şekillerde ifade edebiliriz. Bu çarpanlardan her birinin aynı zamanda o doğal sayının böleni olduğunu biliyoruz.

12 sayısını ele alalım.

12 = 1 . 12,

12 = 2 . 6,

12 = 3 . 4 ,

12 = 2 . 2 . 3

12 sayısının bütün doğal sayı bölenlerinin kümesi {1,2,3,4, 6,12} olur.

Benzer şekilde,

4 ün doğal sayı bölenleri kümesi, D = {1,2,4}

5 in doğal sayı bölenleri kümesi, D = {1,5}

6 nın doğal sayı bölenleri kümesi, D = {1,2,3,6}

11 ün doğal sayı bölenleri kümesi, D = {1,11}

11 sayısının doğal sayı bölenlerinin sadece 1 ve 11 olduğuna dikkat ediniz.

11 sayısı gibi 13 ün de yalnızca iki doğal sayı böleni vardır.

Bölenleri kümesi 1 ve kendisinden ibaret olan, birden büyük bu doğal sayılara **asal sayı** diyoruz.

1 ve kendisinden başka doğal sayı böleni olmayan, 1 den büyük doğal sayılara **asal sayı** denir. Asal olmayan, 1 den büyük doğal sayılara ise **bileşik sayı** denir.

Asal sayıları, doğal sayı bölenleri kümesi iki elemanlı olan doğal sayılar biçiminde de tanımlamak mümkündür. Bu durumda bileşik sayıların doğal sayı bölenleri kümesi en az üç elemanlıdır.

Sıfır sayısı 1 ile bölünebilir, ancak sıfırın sıfır ile bölümü tanımsızdır. Ayrıca sıfırdan farklı her sayı sıfırı böler. O halde sıfır asal sayı değildir. 1 de asal sayı olamaz. Çünkü doğal sayı bölenleri kümesi bir elemanlıdır. En küçük asal sayı 2 dir. 2 nin doğal sayı bölenleri 1 ve 2 dir. 3 asal sayıdır. 3 ün doğal sayı bölenleri 1 ve 3 tür. 4 asal sayı değildir. 4 ün doğal sayı bölenleri 1 ,2 ve 4 tür. 5 asal sayıdır. 5 in doğal sayı bölenleri 1 ve 5 tir. 6 sayısı ise 1 ve kendisinden başka doğal sayılar ile (2 ve 3) bölünebildiği için asal sayı değildir.

ÖRNEK 39

**127 sayısının asal olup olmadığını bulalım.**

Çözüm

$11^2 = 121$

$121 < 127$

$11 < \sqrt{127}$ olduğuna dikkat ediniz.

$\sqrt{127}$ ten küçük asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11 dir.

Bu sayıların hiçbiri 127 yi tam bölmez.

O hâlde, 127 asal sayıdır.

**TANIM** :

Ortak doğal sayı bölenleri sadece 1 olan doğal sayılara **aralarında asal sayılar** denir, a ve b aralarında asal sayılar ise (a, b) = 1 şeklinde gösterilir.

Örneğin; (5,13) = 1, (3,14) = 1, (7,45) = 1 gibi.

İki farklı asal sayı her zaman aralarında asaldır.

Ancak, asal olmayan sayılar da aralarında asal olabilir.

Ardışık iki doğal sayı her zaman aralarında asaldır.

Örneğin; (7,19) = 1, (15, 32) = 1, (50, 51) = 1 gibi.

ÖRNEK 40

$x, y \in \mathbb{N}$ için $(2x + 1)$ ve $(3y + 5)$ sayıları aralarında asal ve

$$\frac{2x+1}{3y+5} = \frac{105}{100}$$

**olduğuna göre, $x + y$ değeri kaçtır?**

Çözüm

$$\frac{2x+1}{3y+5} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20} \text{ dir.}$$

21 ve 20 sayıları aralarında asal oldukları için,

$2x + 1 = 21$ ve $3y + 5 = 20$ dir.

Bu iki denklemin ortak çözümünden,

$x = 10$ ve $y = 5$ bulunur.

Öyleyse, $x + y = 10 + 5 = 15$ olur.

**TANIM** :

n doğal sayısını kalansız olarak bölen pozitif doğal sayılara n doğal sayının bölenleri veya çarpanları denir. n doğal sayısının sıfırdan büyük doğal sayıların çarpımı şeklinde yazılmasına n sayısının **çarpanlarına ayrılması** denir.

Örneğin, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ tür.

Burada 12 sayısının tamamen asal sayıların çarpımı olarak yazıldığı görülüyor.

1 den büyük bir doğal sayının, asal sayıların çarpımı şeklinde yazılmasına bu sayının **asal çarpanlarına ayrılması** denir.

Örneğin,

$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

$17640 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$

$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

biçiminde asal çarpanlarına ayrılmıştır.

17640 sayısını bölen asal sayılar yalnızca 2, 3, 5 ve 7 dir. Bu sayıların yalnızca bir şekilde $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2)$ 17640 sayısını verebileceğini görürüz. Elbette, bu asal sayıların kendi aralarında çarpımlarından elde edilen 6, 10, 14, 35, ... gibi çarpımlar da 17640 ı böler.

Ancak sonuçta bu çarpanların tamamı da 2, 3, 5 ve 7 asal sayılarının çarpımından oluşmaktadır.

ÖRNEK 42

**Asal çarpanlarına $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11$ biçiminde ayrılmış olan sayıyı bulalım.**

*Çözüm*

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$$
$$= 8 \cdot 9 \cdot 125 \cdot 11$$
$$= 99000$$

ÖRNEK 43

$a, b \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$$2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot a = b^3$$

**eşitliğini sağlayan en küçük a ve b sayılarını bulalım.**

*Çözüm*

$b^3$ bir doğal sayı olduğundan, $2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot a$ ifadesindeki asal sayıların üsleri 3 ve 3 ün katları olmalıdır.

Öyleyse a doğal sayısı en küçük $2 \cdot 5^2$ olabilir.

Buna göre, $a = 2 \cdot 5^2 = 50$ olur.

$a = 50$ iken,

$$b^3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 5^2$$
$$= 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$$
$$= (2 \cdot 5 \cdot 7)^3 \text{ ise,}$$

$$b = 2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= 70 \text{ olur.}$$

**TANIM** :

1 den büyük her doğal sayı, asal çarpanlarına ayrılabilir. Bu ayrılış ancak ve ancak bir tek şekildedir.

Bu teoreme, **aritmetiğin temel teorem** i denir.

ÖRNEK 48

48 sayısını asal çarpanlarına $2^4 \cdot 3$ olarak ayırabiliriz. Verilen teoreme göre 48 sayısını $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ çarpımından başka bir şekilde (sıralamaya bakmaksızın) asal çarpanlarına ayırmak mümkün değildir.

Matematiğin en önemli ve ilginç teoremlerinden birisi de asal sayılar kümesinin sonsuz sayıda elemanı olduğunu gösteren teoremdir. İspatı daha iyi kavrayabilmek için, aşağıdaki örneği inceleyiniz:

$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ olsun.

31 sayısını 2, 3 ve 5 asal sayılarıyla böldüğümüzde daima 1 kalanını elde ederiz. Yani, 31 sayısı 2, 3 ve 5 ile kalansız olarak bölünemez.

## ÖRNEK 51

$125^3 \cdot 1024$

**çarpımının sonucunda elde edilen;**

a. Sayının sondan kaç basamağı sıfırdır?

b. Sayı kaç basamaklı bir sayıdır?

## Çözüm

a. $125^3 \cdot 1024 = (5^3)^2 \cdot 2^{10}$

$= 5^6 \cdot 2^{10}$

$= 5^6 \cdot 2^6 \cdot 2^4$

$= 16 \cdot 10^6$

eşitliğinde 10 un üstü 6 olduğundan çarpımın sonucunda elde edilen sayının sondan 6 basamağı sıfırdır.

b. $125^3 \cdot 1024 = 16 \cdot 10^6$

eşitliğinde 10 un üstü 6 olduğundan çarpımın sonucunda elde edilen sayıda 16 dan sonra 6 tane sıfır vardır. Bu durumda sayı 8 basamaklıdır.