

Türev

Türev:

I bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve I'nın uç noktası olmayan bir $x_0 \in I$ noktası verilsin.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Limitine, varsa (yani sonlu bir gerçel sayı ise) $f(x)$ in $x = x_0$ noktasındaki türevi denir ve

$$f'(x_0)$$

ile gösterilir.

$$\left(\begin{array}{l} x - x_0 = h \text{ dersek } x = x_0 + h \\ x \rightarrow x_0 \text{ ise } h \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ifadeleri f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevini ifade eder.

$\frac{d}{dx}$ ifadesine türev operatörü denir
 $f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (f(x))$
şeklinde ifade edilebilir.

ÖRNEK:

Aşağıdaki limitlerin türev olarak gösterimini yazınız.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \underline{f'(2)}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \underline{f'(-1)}$

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \underline{f'(2)}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - 1) - f(-1)}{h} = \underline{f'(-1)}$

e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + x) - f(x)}{h} = \underline{f'(x)}$

ÖRNEK:

Gerçel sayılar kümesi üzerinde f fonksiyonu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^3 - 2x^2 - 3x$$

eşitliğini sağlıyor.

Buna göre, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

ÖRNEK:

Türevlenebilir bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$f(2) = 4$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÖSYM SORUSU

ÖRNEK:

Gerçek sayılarda türevli bir f fonksiyonu için

$$f(1) = 4$$

$$f'(x) = x^3 + x + 1$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{2x^2 - 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

ÖRNEK:

Gerçek sayılarda türevli bir f fonksiyonu için,

$$f'(3) = 4$$

olduğuna göre, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h^2 + 2h}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Soldan - Sağdan Türev:

f fonksiyonunun $x = a$ da türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul, soldan ve sağdan türevlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır.

ÖRNEK:

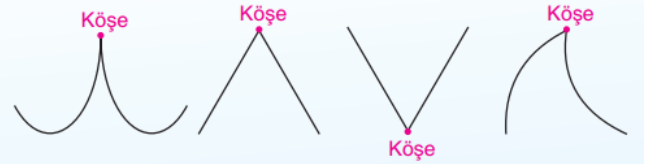
$$f(x) = \begin{cases} -4x - 3, & x \leq -1 \text{ ise} \\ 2x^2 - 1, & -1 < x < 1 \text{ ise} \\ 4x - 3, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında türevli olup olmadığını araştırınız.

Türev Süreklilik Limit ilişkisi

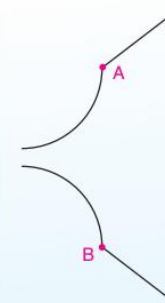
- $f(x)$, $x = x_0$ da türevli ise bu noktada sürekli, limitli ve tanımlıdır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Yani, $f(x)$, $x = x_0$ da tanımlı iken limitli, limitli iken sürekli, sürekli iken türevli olmayabilir.
- Polinom fonksiyonlar her $x \in \mathbb{R}$ için türevlidir.
- Fonksiyonlar tanımsızlık ve süreksizlik noktalarında türevsizdir.
- Fonksiyonlar tanım aralığının uç noktalarında türevsizdir.
- Fonksiyonlar, fonksiyona ait grafiğin sivri noktalarında türevsizdir.

Bir fonksiyon bir noktada **köşe** yapıyorsa, o noktada türevlenebilir değildir.



Köşe yapılan noktalarda türev yoktur.

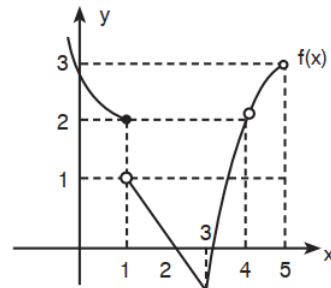
NOT:



A ve B noktalarında fonksiyonlar kesin olarak köşe yapıyor diyemeyiz, çünkü keskin bir dönüş yok. Bu noktalarda fonksiyon türevli olabilir de olmayabilir de. Sağdan ve soldan türevlere ayrı ayrı bakılmalıdır. Bu yüzden, bu tür grafiklerde sadece grafiğe bakarak türevlenebilirlik hakkında fikir belirtmek mümkün değildir.

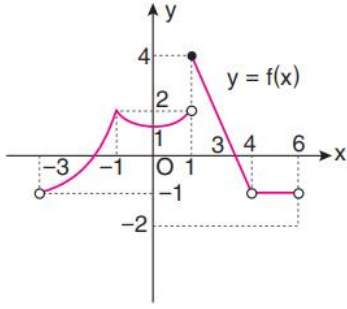
ÖRNEK:

Aşağıda dik koordinat düzleminde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaları bulunuz.

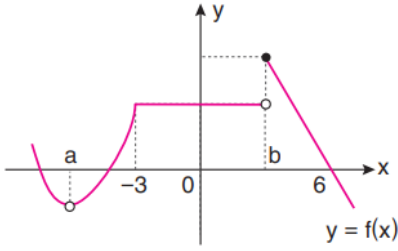
ÖRNEK:E



f fonksiyonunun $(-3, 6)$ aralığında türevsiz olduğu noktaların apsisi toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

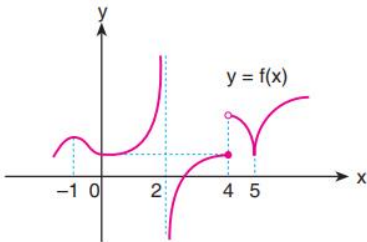
ÖRNEK:D



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu x değerlerinin toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

ÖRNEK:

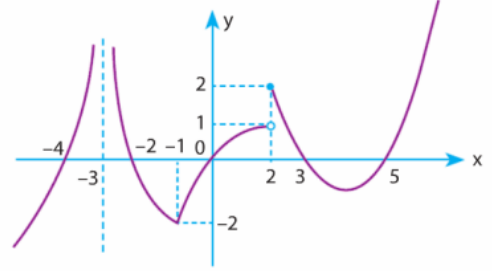


Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonu a tane noktada türevli değil, b tane noktada da sürekli olmasına rağmen türevli değildir.

Buna göre, $a + b$ kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÖRNEK:E

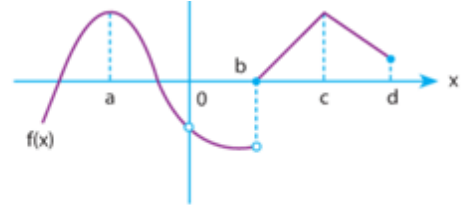


Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $|f(x)|$ fonksiyonu kaç farklı noktada türevsizdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

ÖRNEK:B



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

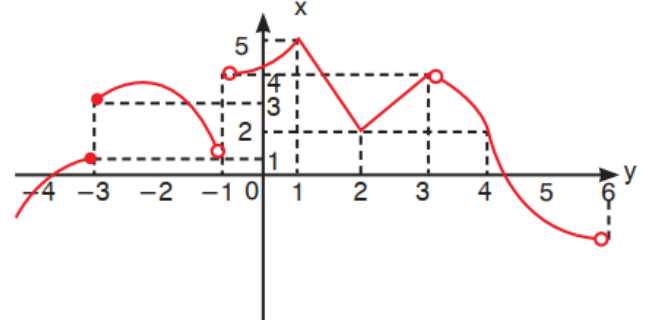
- I. $f(x)$ in 2 noktada limiti yoktur.
- II. $f(x)$ in 4 noktada türevi yoktur.
- III. $f(x)$, 3 noktada süreksizdir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

ÖRNEK:D

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



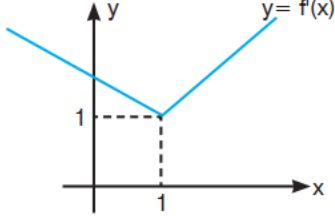
f fonksiyonunun $(-5, 6)$ aralığında türevli olduğu tamsayı değerleri toplamı a , sürekli olduğu halde türevli olmadığı tamsayı değerleri toplamı b dir.

Buna göre, $f\left(\frac{a}{b}\right)$ değeri kaçtır?

Türev

ÖRNEK:A

Aşağıda dik koordinat düzleminde f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



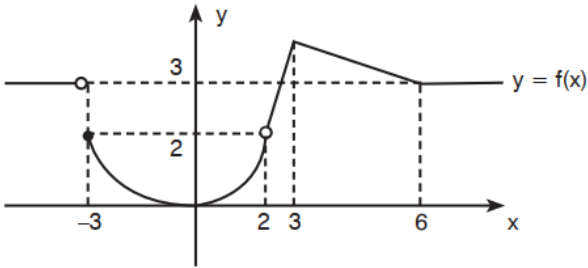
Buna göre,

- I. $x=1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun limiti vardır.
- II. $x=1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.
- III. $f'(1)$ vardır.
- IV. $f''(1)$ vardır.

İfadelerinden hangileri doğrudur.

- A) I ve II B) I, II ve III C) I ve III
D) II ve IV E) I, II ve IV

ÖRNEK:E



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $(-5, 7)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisi toplamı kaçtır?

- A) -3 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

NOT:

m, n ve a gerçel sayı olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+m \cdot h) - f(x+n \cdot h)}{(m-n)h} = f'(a)$$

ÖRNEK:A

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+3h)}{h}$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-f'(x)$ B) $2f'(x)$ C) $2-f'(x)$
D) $3-f'(x)$ E) $3f'(x)$

ÖRNEK:A

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ her noktada türevli bir fonksiyon ve

$f'(1) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h}$$

kaçtır?

- A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3
ÖSYM

Türev

Türev Alma Kuralları:

$$f(x) = x^r \text{ ise } f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = c \text{ ise } f'(x) = 0 \text{ (Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.)}$$

$$f(x) = c \cdot x^r \Rightarrow f'(x) = c \cdot r \cdot x^{r-1}$$

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

f(x)	f'(x)
x^3	
x^2	
x	
5	
1	
$2x^3$	
$\frac{3}{4}x$	
$\frac{1}{x}$	

ÖRNEK.E

$$f(x) = \frac{1}{x^2-6} + \frac{1}{x-2}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 12 B) 6 C) 4 D) -6 E) -12

ÖRNEK.C

$$f(x) = \sqrt{x^2-8}$$

fonksiyonu aşağıdaki noktaların hangisinde türevsizdir?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 3 E) $\sqrt{10}$

ÖRNEK.C

$$f(x) = \frac{x}{x^2-3x-1}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu x değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 3 D) 5 E) 7

ÖRNEK.D

$$f(x) = \frac{x+2}{-2x^2+mx+n}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu x değerlerinin toplamı 3 olduğuna göre m değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

ÖRNEK

$$f(x) = \frac{a}{x} \text{ ve } f'(2) = -\frac{1}{2}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Türev

ÖRNEK

$$f(x) = x^3 - 12x + 2$$

$$f(a) = 0$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) -1 D) 4 E) 16!

ÖRNEK

$$f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 6x + 1)$$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

ÖRNEK

$$y = x^2 - 3x + 1$$

olduğuna göre, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) -5 B) -3 C) -1 D) 3 E) 5

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x) = x^3 + 5x + 1$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ kaçtır?}$$

- A) 5 B) 8 C) 12 D) 17 E) 18

ÖRNEK

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x) = x^2 + 5x + 9$$

olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÖRNEK

$$f(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \text{ fonksiyonu veriliyor.}$$

$$f'(x) = a \cdot x^p + b \cdot x^q$$

olduğuna göre, $\frac{a+b}{p+q}$ kaçtır?

- A) -8 B) -6 C) 1 D) 4 E) 8

Türev

dikkat

Görüntü elemanları fonksiyonun değişkenine bağlı olarak değişmeyen fonksiyonların hepsi sabit fonksiyondur.

örnek:

a) $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) =$

b) $f(x) = 2t + 4 \Rightarrow f'(x) =$

c) $f(t) = 3x^2 - \sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = .$

KÖKLÜ SAYI TÜREVİ

$\sqrt[b]{x^a}$ fonksiyonunun türevini almak için $\sqrt[b]{x^a}$ ifadesini önce $x^{\frac{a}{b}}$ şeklinde yazdıktan sonra kuvvet kuralını kullanırız.

Özel olarak,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olduğunu aklınızda tutmanızda fayda var. Bunu çok sık kullanacağız.

örnek:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

örnek:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

olduğuna göre, $f'(8)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{36}$

örnek:

$$f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}$$

olduğuna göre, $f'(4)$ değeri kaçtır?

örnek

Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz

I. $y = x\sqrt{x}$

II. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

örnek:

$$f(x) = \sqrt{mx+n}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2\sqrt{mx+n}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{mx+n}}$ C) $\frac{m}{2\sqrt{mx+n}}$

D) $\frac{n}{2\sqrt{mx+n}}$ E) $2\sqrt{mx+n}$

Toplam ve Farkın Türevi

$$f(x) = g(x) \mp h(x) \text{ ise } f'(x) = g'(x) \mp h'(x)$$

örnek:

a) $f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = .$

b) $f(x) = 4x^3 + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = .$

c) $f(x) = x - \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = .$

örnek:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

fonksiyonu için $f(1) + f'(1)$ toplamı kaçtır?

örnek:

$$f(x) = ax^2 + bx - 3$$

$$f(1) = f'(1) = 5$$

olduğuna göre, $f(x)$ in $x = a$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) 11 B) 17 C) 23 D) 29 E) 31

ÖSS 2007

$P(x)$ polinom fonksiyonunun türevi $P'(x)$ ve

$$P(x) - P'(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

olduğuna göre, $P(x)$ in katsayılarının toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

örnek

$$f(x) = 5x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ değeri kaçtır?

- A) 21 B) 22 C) 25 D) 27 E) 28

örnek:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

Türev

Çarpımın Türevi:

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilen iki fonksiyon olsun.

O zaman,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

tir. Özel olarak, c sabit bir gerçektek sayı olmak üzere,

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

tir.

ÖRNEK

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x)$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

ÖRNEK:

$g(x)$ her noktada türevlenebilen bir fonksiyondur.

$$f(x) = x^3 \cdot g(x)$$

$$f'(3) = 54$$

olduğuna göre, $g(3) + g'(3)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

ÖRNEK:

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 4) \cdot (x^3 + 1)$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

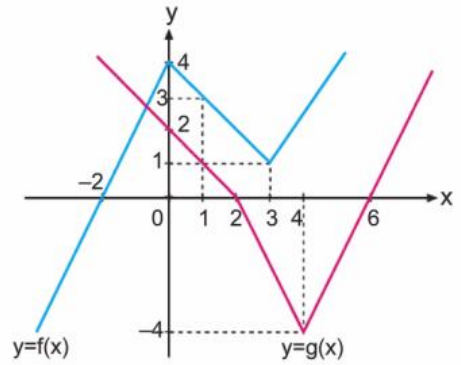
ÖRNEK:

$$g(x) = (31 - 15\sqrt{x})(x^2 - 16)$$

olduğuna göre, $g'(4)$ kaçtır?

- A) -8 B) 0 C) 8 D) 24 E) 263

ÖRNEK:



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

olduğuna göre, $p'(1)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 1 E) 4

Türev

ÖRNEK:a

Baş kat sayısı 2 olan üçüncü dereceden bir P(x) polinomu,

$$P(1) = P(2) = P'(2) + 12 = 0$$

eşitliğini sağlamaktadır.

Buna göre, P(x) in sabit terimi kaçtır?

(P(x) in türevi P'(x) tir.)

- A) -32 B) -8 C) 4 D) 6 E) 8

örnek:

$$f(x) = (x - 1).(x - 2) \dots (x - 2020)$$

olduğuna göre, f'(1) değeri kaçtır?

- A) -2019! B) -2017! C) 0
D) 2018! E) 2020!

örnek:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$f(x).g(x) = x^2 + 1$$

$$f(2) = g(2) = 2$$

$$f(2) = 6$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre, g'(2) kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları ve $g(x) \neq 0$ için $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da türevlenebilirdir ve

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

şeklinde ifade edilir.

örnek:

R - {1} kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f'(2) kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

örnek:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$g(x) = \frac{2x - 1}{f(x) + 1}$$

eşitliği sağlanmaktadır.

$$f(1) = f'(1) = 2$$

olduğuna göre, g'(1) kaçtır?

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

Türev

örnek:

$$f(x) = \frac{6x+3}{5} + \frac{5}{x+3} \quad \text{fonksiyonu veriliyor.}$$

Buna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{5}$ C) 0 D) $\frac{1}{5}$ E) 1

örnek:

$f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyondur.

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

$$f'(-1) = -10$$

olduğuna göre, $g'(-1) + g(-1)$ kaçtır?

- A) 8 **B) 10** C) 12 D) 16 E) 20

örnek

$f(1) = 6$, $f'(1) = -1$ olduğuna göre,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2f(x)}{x^2 + 1} \right)$$

ifadesinin $x = 1$ için değeri kaçtır?

- A) -24 B) -15 C) -7 D) 7 E) 15

Üslü Fonksiyonların Türevi:

$$f(x) = (g(x))^n \text{ ise } f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

örnek:

a) $f(x) = (2x + 5)^3 \Rightarrow$

b) $f(x) = (1 - x^2)^4 \Rightarrow$

örnek:

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$g(x) = \sqrt{x+8}$$

olduğuna göre, $\left(\frac{f^2}{g}\right)'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3 D) $\frac{23}{6}$ E) 4

örnek

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 1)^3 \quad \text{fonksiyonu veriliyor.}$$

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 16 B) 20 C) 32 D) 36 E) 52

Türev

örnek

$$f(x) = (3x - 4)^4 \cdot (2x - 3)$$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 32 B) 48 C) 64 D) 96 E) 128

örnek

$$f(x) = (2x + 4)^{\frac{3}{5}}$$

olduğuna göre, $f'(14)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) 1

örnek

$$f(x) = (x - 2a)^2 \text{ olmak üzere,}$$

$f(3) = -6$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

not

$P(x)$ polinomu $(x - a)^2$ ile tam bölünebiliyorsa

$$P(a) = P'(a) = 0$$

örnek:

$$P(x) = x^3 - 2mx^2 + nx + 1$$

polinomu $(x - 1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, $m.n$ çarpımı kaçtır?

İKİNCİ MERTEBEDEN TÜREV:

$y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi $f''(x)$ olup ikinci

türev $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile de gösterilebilir.

örnek:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$$

olduğuna göre, $f'(0) + f''(0)$ toplamı kaçtır?

Türev

örnek:

$$f(x) = (x-1)^2(2x-t)$$

$$f'(0) = 0$$

olduğuna göre, t kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) 0 D) -2 E) -4

ÖSYM SORUSU

PARÇALI FONKSİYON VE MUTLAK DEĞERİN TÜREVİ:

Parçalı fonksiyon ve mutlak değer fonksiyonu için kritik noktalarında türev soruluyorsa; önce sürekliliğe, sonra sağdan ve soldan türeve bakılır. Diğer noktalarda fonksiyonun tanımlandığı bölgelere göre türev alınır.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & , & x < 2 \\ 4 & , & x = 2 \\ x^2 + x - 2 & , & x > 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f(1) = 1$ B) $f(3) = 7$ C) $f(2) = 0$
D) $f(2^+) = 5$ E) $f(2^-) = 10$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , & x \geq 3 \\ x^2 + 2x + 3 & , & x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu bütün reel sayılar için türevlenebilir olduğuna göre, b kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 3 D) 6 E) 9

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & , & x > 2 \\ 2 & , & x = 2 \\ x^3 + bx^2 + c & , & x < 2 \end{cases}$$

f(x) fonksiyonu x = 2 noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olduğuna göre, a+c toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -1 C) 1 D) 3 E) 6

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & , & x \leq -1 \\ x^3 - 1 & , & -1 < x \leq 4 \\ 5x + 2 & , & x > 4 \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$f'(-2) + f'(2) + f'(7)$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Türev

ÖRNEK:

$$f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2 - x| + 2$$

olduğuna göre, $f(1) + f(3)$ ün değeri nedir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
ÖSYM

örnek

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 3, & x \geq 3 \\ x^3 - 2x + 1, & x < 3 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(3^-)$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 12 C) 18 D) 25 E) 29

örnek

$$f(x) = |x^2 - 16|$$

olduğuna göre, $f'(2) + f'(5)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 14

not

- $f(x) = |x - a|$ ise $f'(a)$ yoktur.
- $f(x) = |(x - a)^2|$ ise $f'(a) = 0$ dir.
- $f(x) = |(x - a)^3|$ ise $f'(a) = 0$ dir.
- $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için türevli ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta \leq 0$ dir.
- $f(x) = \sqrt{x - a}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında tanımlı olup $x = a$ uç noktasında $f'(a)$ yoktur.
- $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için türevli ise $ax^2 + bx + c = 0$ ifadesinde $\Delta < 0$ dir.

ÖRNEK:

$$f(x) = |3x^2 + 6x + a|$$

fonksiyonu tüm reel sayılarda türevlenebildiğine göre, a nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÖRNEK:

- $f(x) = \sqrt{x - 2}$
- $g(x) = |x - 2|$
- $h(x) = |x^2 - 4x + 4|$

fonksiyonlarından hangileri $x = 2$ noktasında türevlidir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) II ve III

ÖRNEK:

$$f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2 - x| + 2$$

olduğuna göre, $f(1) + f(3)$ ün değeri nedir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
ÖSYM

Türev

ÖRNEK:

$f(x) = |x^2 - 4x|$ olduğuna göre

$f'(1) + f'(5)$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÖRNEK:

$f(x) = |x - 2| + 3x$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

- A) $f(2^+) = 4$ B) $f(2^-) = 2$ C) $f(5) = f(4)$
D) $f(2) = 4$ E) $f(-2) = 2$

örnek

$f(x) = |x^2 - 9|$

$q(x) = |3x + 9|$

olduğuna göre, $f'(3^+) + q'(-3^-)$ kaçtır?

- A) -3 B) 0 C) 3 D) 9 E) 19

Bileşke Fonksiyonun Türevi

$g(x)$ fonksiyonu x noktasında türevli, $f(x)$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevli ise $(f \circ g)(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlidir

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ÖRNEK:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $(f \circ g)'(2)$ kaçtır?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

ÖRNEK:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f fonksiyonu için

$$f(4x) = 3x^2 + 2x + 1$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre, $f'(4)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Türev

ÖRNEK:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f fonksiyonu

$$f(3x - 5) = 2x^4 + x - 1$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $f(-2) + f(1)$ toplamı kaçtır?

- A) 20 B) 28 C) 36 D) 40 E) 44

ÖRNEK:

Pozitif gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$f(x) + 3g(3 - 2x) = 0$$

$$g'(2) = \frac{1}{3}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÖRNEK:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$g(x) = f(x - f(x))$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(2) = 3$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre, $g'(2)$ kaçtır?

- A) 0 B) -3 C) -6 D) -9 E) -12

ÖRNEK:

k bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesinin birer alt kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir f ve g fonksiyonları için

$$f(x) = g(x^2) + kx^3$$

eşitliği sağlanmaktadır.

$$f'(-1) = g'(1) = 2$$

olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

2019-AYT

Türev

ÖRNEK:

Gerçek sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu

$$f(x) = x^2 + x - 4$$

biçiminde tanımlanıyor.

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir g fonksiyonunun türevi olan g' fonksiyonu $g'(x) = 0$ eşitliğini yalnızca $x = 2$ değeri için sağlamaktadır.

Buna göre,

$$(g \circ f)'(x) = 0$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 6
2019-AYT

örnek

$$f(2x - 3) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{ve} \quad f''(-1) = 4$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 5 E) 6

örnek

$f(x)$ fonksiyonunun orijindeki teğetinin eğimi -1 dir.

$$g(x) = xf(x^2 + 4x - 21)$$

olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

- A) -30 B) -15 C) -3 D) -1 E) 0

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$f : A \rightarrow B$ birebir ve örten fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x \text{ olup}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = x^3 + 1$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(-7)$ değeri kaçtır?

ÖRNEK

$$f(x^2 + x - 1) = 2x - 3$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(1)$ değeri kaçtır?

ÖRNEK:

$f : [3, \infty) \rightarrow [-23, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - 6x - 14$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(2)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 5

Türev

Zincir Kuralı

$$y = f(u)$$

$$u = g(z)$$

$$z = h(x)$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

$y = (f \circ g \circ h)(x)$ in türevi,

$$(f \circ g \circ h)'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

örnek

$$y = 2t + 1$$

$$t = u^2 + u$$

$$u = x - 1$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ bulunuz?

örnek

$$y = \frac{1}{t}$$

$$t = 5 - 2x$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ $x=2$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

örnek

$$y = x^2 + x$$

$$u = \sqrt{x-1}$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{du}$ ifadesinin $x=2$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

örnek

$$y = t^3 + t - 1$$

$$t = 2m + 1$$

$$m = \frac{1}{x} \text{ olduğuna göre}$$

$f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) -60 B) -56 C) -48 D) -42 E) -36