

8.Sınıf Matematik Üslü İfadeler Konu Anlatımı

Üs

Üs, bazen kuvvet, b taban, n üs veya kuvvet olmak üzere, b^n olarak gösterilen ve "b üssü n", "b üzeri n" veya "b'nin n'inci kuvveti" olarak telaffuz edilen matematiksel işlem. Eğer n pozitif bir tam sayıysa, tabanın tekrarlanan çarpımına karşılık gelir:

$\sqrt{9}$, "karekök 9" diye okunur.

$\sqrt{25}$, "karekök 25" diye okunur.

Örnek: 64 sayısı hangi sayının karesidir?

$64=8^2$ o halde $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ dir.

Buna karşılık, sadece n pozitif bir tam sayı ise geçerlidir, çünkü bir şey -2 tane ya da 1/2 tane vardır diyemeyiz. Üs yani n sayısının pozitif olmadığı durumlar aşağıda listelenmiştir.

$\sqrt{9}$, "karekök 9" diye okunur.

$\sqrt{25}$, "karekök 25" diye okunur.

Örnek: 64 sayısı hangi sayının karesidir?

$64=8^2$ o halde $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ dir.

Kuvvet rasyonel bir sayı ise

$a^{\frac{1}{2}}$ örneğinde olduğu gibi, üs bir rasyonel sayı ise, bu, \sqrt{a} olarak, bir köklü sayı oluşturur. Bu konu için köklü sayılar incelenebilir.

Özellikler ve Kurallar

- 1'in bütün kuvvetleri 1'dir.
 $1^n = 1$
- 0 dışındaki tüm sayıların 0. kuvveti: 1'dir.
 $a \neq 0, a^0 = 1$
- 0'ın 0 hariç bütün kuvvetleri 0'dır.
 $0^{100} = 0$
- Bir sayının 1. kuvveti, sayının kendisidir.
 $a^1 = a$
- Taban ve üs 0 ise o işlem belirsizdir.
 0^0 (belirsiz)
- Pozitif sayıların pozitif kuvvetleri daima pozitif bir sayı verir.
- Negatif sayılar parantez içinde ve kuvvetleri çift sayı ise sonuç pozitif olur, kuvvetleri tek sayı ise sonuç negatif olur:
 $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$ (Kuvvet çift, taban parantezde.)
 $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$ (Kuvvet çift, taban parantezde değil.)
 $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ (Kuvvet tek, daima negatif sonuç verir)
 $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$
- Tabanları aynı iki üslü sayının çarpımı, taban üzeri kuvvetlerin toplamıdır:
 $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{m \text{ kere}} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ kere}} = a^{m+n}$
- Tabanları aynı iki üslü sayının bölümü taban üzeri kuvvetlerin farkıdır:
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Çarpmadan (üsler toplamından) farklı olarak, $m \neq n \implies \frac{a^m}{a^n} \neq \frac{a^n}{a^m}$
- Üslü bir sayının üssü alınırken, içteki kuvvet ile dıştaki kuvvet çarpılır:
 $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$
- Üsler ortak parantezde dağılıma özelliğine sahiptir:
 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- Üstler ve tabanlar aynı olacak şekilde,
 $p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$
- 4^2 ve 2^4 hariç, a ve b rasyonel sayı olmak üzere, $a \neq b \implies a^b \neq b^a$, başka bir deyişle üs ile taban yer değiştirilirse sayının değeri de değişir.
- $3^a = 3^b \implies a = b$ (a ve b rasyonel sayı ise)
- a ve b 0'dan farklı tam sayılar olmak üzere,
 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Örnekler

• $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = ?$

Çözüm:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{1} = -\frac{3}{2}$$

• 4^{-4} sayısının yarısı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{(2^2)^{-4}}{2} = \frac{2^{-8}}{2} = 2^{-8-1} = 2^{-9}$$

Sıralama

Üslü sayılarda sıralama yaparken ya tabanların ya da üslerin eşitlenmesi gerekir. Ondan sonra sıralama işlemi yapılır.

Örnekler

- $3^4, 9^8, 27^1$ sayılarının küçükten büyüğe sırası nedir?

Çözüm:

3, 9 ve 27 sayıları 3'ün katı olduğu için, tabanlar 3 yapılabilir:

$$9^8 = (3^2)^8 = 3^{16}$$

$$27^1 = (3^3)^1 = 3^3$$

ve 3^4 olur.

Küçükten büyüğe tabanlar aynı olduğu için, kuvvetlere bakarak sıralama yapılır:

$$3^3 < 3^4 < 3^{16} \implies 27^1 < 3^4 < 9^8$$

- $2^{18}, 9^9, 125^6$ sayılarının küçükten büyüğe sırası nedir?

Çözüm:

Üsler 18'de eşitlenebilir.

$$9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$$

$$125^6 = (5^3)^6 = 5^{18}$$

ve 2^{18}

Kuvvetlerin aynı olmasından ötürü, sıralama tabanlara göre yapılabilir:

$$2^{18} < 3^{18} < 5^{18} \implies 2^{18} < 9^9 < 125^6$$

Üslü İfadelerde Basamak Sayısı

Üslü sayıların basamak sayısını hesaplamak kolay değildir. Örneğin 2^{195} sayısının basamak sayısını, bakarak bulamayız. 195 tane 2'nin çarpımını bulup, kaç basamaklı olduğu hesaplanabilir. Bu yüzden genelde tabanı 10 olan üslü sayıların basamak sayısını bulmaya yönelmek gerekir, örneğin:

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ (1'in yanında 3 sıfır)}$$

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \text{ (1'in yanında 5 sıfır)}$$

10'un n tane çarpımında, 1 yanına n adet sıfır gelecek şekilde düşünülerek, çıkan sayının kaç basamaklı olduğu bulunur, o halde:

$$10^7 \implies 1\text{'in yanında 7 sıfır} \implies 8 \text{ basamaklı bir sayı.}$$

$$10^{20} \implies 1\text{'in yanında 20 sıfır} \implies 21 \text{ basamaklı bir sayı.}$$

Örnekler

- $5^3 \cdot 10^{50}$ kaç basamaklıdır?

Çözüm:

$$5^3 \cdot 10^{50} = 125 \cdot 10^{50} \implies 125 \text{ (3 basamak) sayısının yanına 50 sıfır gelecek, o halde, 53 basamaklı bir sayıdır.}$$

- $25^2 \cdot 8^2 \cdot 3$ işleminin sonucu kaç basamaklıdır?

Çözüm:

$$(5^2)^2 \cdot (2^3)^2 \cdot 3$$

$$= 5^4 \cdot 2^6 \cdot 3$$

$$= 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3$$

$$= 10^4 \cdot 4 \cdot 3 = 10^4 \cdot 12 \implies 6 \text{ basamaklıdır.}$$

Üslü İfadelerin Bilimsel Gösterimi

Çok büyük ya da çok küçük sayıların gösteriminde, hem gereken detayda sayının değerini, hem basamak sayısını veren hem de bunu daha okunabilir kolay bir şekilde yapan sayısal gösterime bilimsel gösterim denir.

$1 \leq |a| < 10$ ve n bir tam sayı olmak üzere, bilimsel gösterim; $a \cdot 10^n$ olarak yazılır.

Özellikler ve Kurallar

- a sayısının 1 ile 10 arasında olması şarttır.
- Sayıda ',' yok ise, en sağdaki rakamın sonunda virgöl varmış gibi düşünülmalıdır.
- 10^n ifadesi yok ise, bu, sayının yanında 10^0 olduğu anlamına gelir. Örneğin: $5 = 5 \cdot 10^0$
- Virgöl sağa kaydırsa sayı büyür, 10 'nun kuvveti de kayılan basamak sayısı kadar küçülür. Örneğin: $0,147 \cdot 10^2 = 1,47 \cdot 10^1$
- Virgöl sola kaydırsa sayı küçülür, 10 'nun kuvveti de kayılan basamak sayısı kadar büyütülür. Örneğin: $23,8 \cdot 10^4 = 2,38 \cdot 10^5$

Örnekler

- Işık saniyede 300000km yol almaktadır. Buna göre ışığın 1 dakikada kaç km yol gittiğinin bilimsel gösterimi nedir?

Çözüm:

$$1sn \rightarrow 300000km$$

$$60 \cdot 300000 = 18 \cdot 10^6 = 1,8 \cdot 10^7 km$$

- $0,0025 \cdot 10^{-6} = x \cdot 10^{-8}$ eşitliğini sağlayan x sayısının bilimsel gösterimi nedir?

Çözüm:

$$25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6} = 25 \cdot 10^{-10}$$

$$25 \cdot 10^{-10} = x \cdot 10^{-8}$$

$$x = \frac{25 \cdot 10^{-10}}{10^{-8}} = 25 \cdot 10^{-10+8} = 25 \cdot 10^{-2}$$

$$x = 2,5 \cdot 10^{-1}$$

Reel Üsler

Pozitif reel sayıların reel kuvvetleriyle üs alma, ya rasyonel kuvvetlerin süreklilikle reellere genişletilmesiyle ya da genelde olduğu gibi logaritma aracılığıyla üstel olarak ifade edilmesiyle tanımlanabilir. Sonuç her zaman pozitif bir reel sayıdır. Üsleri tam sayı olmayan pozitif reel tabanlar söz konusu olduğunda da, yukarıda pozitif tam sayı tabanlar için belirtilmiş özellikler ve kurallar aynı şekilde geçerlidir.

Öte yandan, negatif bir reel sayının reel kuvvetinin, reel olmayabileceğinden ve birden fazla değere sahip olabileceğinden dolayı, tutarlı bir şekilde tanımlanması çok daha zordur. Bu değerlerden biri, esas değer olarak seçilebilir, fakat aşağıdaki gibi özdeşlikler esas değerler için geçerli olmayabilir:

Örnek: 275,489 sayısının 10 un kuvvetlerini kullanarak

çözümleyelim.

275,489 sayısının üzerine bize yardımcı olması açısından 10 un kuvvetlerini yazalım.

$$\begin{matrix} 10^2 & 10^1 & 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} \\ 2 & 7 & 5 & , & 4 & 8 & 9 \end{matrix}$$

$$(2 \cdot 100) + (7 \cdot 10) + (5 \cdot 1) + (4 \cdot 0,1) + (8 \cdot 0,01) + (9 \cdot 0,001)$$

$$(2 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10^1) + (5 \cdot 10^0) + (4 \cdot \frac{1}{10}) + (8 \cdot \frac{1}{100}) + (9 \cdot \frac{1}{1000})$$

$$(2 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10^1) + (5 \cdot 10^0) + (4 \cdot 10^{-1}) + (8 \cdot 10^{-2}) + (9 \cdot 10^{-3})$$

Yukarıdaki üç gösterim birbirinin aynısıdır.

Bu nedenle, tabanı pozitif reel sayı olmayan bir üs alma işlemi genellikle çoğul değerli fonksiyonlar kapsamında incelenir.

Üslü İfadelerde Negatif Kuvvet

Bir üslü ifade paydan paydaya veya paydadana paya alındığında, **üssün işareti değişir**. Yani sayı ters çevrilirse üstteki sayı işaret değiştirir.

a sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere,

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Örnek 1:

2^{-3} sayısını kesir olarak yazalım.

$$2^{-3} = \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{8}$$

BİLGİ: $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve n reel sayı olmak üzere;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Örnek 2:

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ifadesinin değerini bulalım.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = \frac{5}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{25}{1} = 25$$

Bilgi: Negatif sayılarda çift kuvvet parantezin dışında ise işlemin sonucu pozitiftir, diğer durumların hepsinde işaret negatiftir.

Rasyonel Sayıların Kuvvetleri

a, b ve x sıfırdan farklı birer tam sayı olmak üzere;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$$

Örnek: Aşağıdaki alıştırmaları inceleyelim.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

Üslü Sayının Üssü

Üslü bir ifadenin üssü alınır, üsler çarpılır.

$$\left(x^m\right)^n = x^{m.n}$$

Örnek: $(2^3)^4$ ifadesinin sonucunu bulalım.

$$(2^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12}$$

Bilgi: Negatif sayılarda çift kuvvet parantezin dışında ise işlemin sonucu pozitiftir, diğer durumların hepsinde işaret negatiftir.

Örnek: $(-2^2)^3 = -2^6 = -64$ $(-2^3)^2 = (-2)^6 = 64$

Ondalık Sayılarda Çözümleme

Örnek: 275,489 sayısının 10 un kuvvetlerini kullanarak çözümleyelim.

275,489 sayısının üzerine bize yardımcı olması açısından 10 un kuvvetlerini yazalım.

$$\begin{matrix} 10^2 & 10^1 & 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} \\ 2 & 7 & 5 & , & 4 & 8 & 9 \end{matrix}$$

$$(2.100)+(7.10)+(5.1)+(4.0,1)+(8.0,01)+(9.0,001)$$

$$(2.10^2)+(7.10^1)+(5.10^0)+(4.\frac{1}{10})+(8.\frac{1}{100})+(9.\frac{1}{1000})$$

$$(2.10^2)+(7.10^1)+(5.10^0)+(4.10^{-1})+(8.10^{-2})+(9.10^{-3})$$

Yukarıdaki üç gösterim birbirinin aynısıdır.

Üslü Sayılarda Çarpma İşlemi

Tabanları aynı olan üslü sayılar **çarpılırken üsler toplanır.**

$$a^x . a^y = a^{x+y}$$

Örnek:

$$2^2 . 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$$

Sıra Sizde-1

Aşağıdaki sayıların karekökünü bulunuz.

a) $\sqrt{0} =$

b) $\sqrt{100} =$

c) $\sqrt{169} =$

d) $\sqrt{256} =$

e) $\sqrt{121} =$

f) $\sqrt{625} =$

g) $\sqrt{196} =$

h) $\sqrt{225} =$

k) $\sqrt{900} =$

l) $\sqrt{1600} =$

Sıra Sizde-2

a) $\sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{1} + \sqrt{0} =$

b) $\sqrt{36} - (-\sqrt{81}) - \sqrt{121} =$

c) $\sqrt{144} + \sqrt{169} - \sqrt{289} =$

d) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{36} - \sqrt{1} \cdot \sqrt{25} =$

e) $\sqrt{256} : \sqrt{16} =$

Örnek:

$\sqrt{20}$ sayısı hangi iki tam sayı arasındadır.

$\sqrt{20}$ sayısına en yakın tam kare sayılar 16 ve 25 dir. Bu sayıları $16 < 20 < 25$ şeklinde sıralayabiliriz.

$$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$\sqrt{20}$,sayısı 4 ile 5 tamsayıları arasındadır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki sayılar hangi iki tam sayı arasındadır?

a) $\dots < \sqrt{10} < \dots$

b) $\dots < \sqrt{28} < \dots$

c) $\dots < \sqrt{46} < \dots$

d) $\dots < \sqrt{60} < \dots$

e) $\dots < -\sqrt{15} < \dots$

f) $\dots < -\sqrt{33} < \dots$

Bilgi: Üsleri aynı, tabanları farklı olan üslü sayılar çarpılırken; tabanlar çarpılır, üs aynen yazılır.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Örnek:

$$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

Üslü Sayılarda Bölme İşlemi

Bilgi: Kök dışındaki sayının karesi alınır, kök içinde yazılır ve içerdeki sayı ile çarpılır.

Sıra Sizde

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$

b) $3\sqrt{2} =$

c) $2\sqrt{5} =$

d) $2\sqrt{14} =$

e) $3\sqrt{7} =$

f) $2\sqrt{10} =$

g) $-5\sqrt{6} =$

h) $-3\sqrt{11} =$

Sıra Sizde-1

Aşağıdaki sayıların karekökünü bulunuz.

a) $\sqrt{0} =$

b) $\sqrt{100} =$

c) $\sqrt{169} =$

d) $\sqrt{256} =$

e) $\sqrt{121} =$

f) $\sqrt{625} =$

g) $\sqrt{196} =$

h) $\sqrt{225} =$

k) $\sqrt{900} =$

l) $\sqrt{1600} =$

Sıra Sizde-2

a) $\sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{1} + \sqrt{0} =$

b) $\sqrt{36} - (-\sqrt{81}) - \sqrt{121} =$

c) $\sqrt{144} + \sqrt{169} - \sqrt{289} =$

d) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{36} - \sqrt{1} \cdot \sqrt{25} =$

e) $\sqrt{256} : \sqrt{16} =$