

ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

12. 1. 1. Üstel Fonksiyon

Terimler ve Kavramlar : Üstel
fonksiyon

Sembol ve Gösterimler : $f(x) =$

1. 1. 1. 1. Üstel fonksiyonu açıklar.

a) Üstel fonksiyonlara neden
ihtiyaç duyulduğu vurgulanmalıdır.

b) Üslü ifadeler ve bunlarla yapılan
işlemlerin özellikleri hatırlatılır.

c) Üstel fonksiyonların bire bir ve örten olduğu grafik yardımıyla gösterilir.

-) Üstel fonksiyonların hangi durumlarda artan veya azalan oldu-**

ğu bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak gösterilir.

~01A-1~

1. ÜNİTE : ÜSTEL ve

LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

ÜSTEL FONKSİYON

Üstel fonksiyonlar başta matematik, kimya, fizik, biyoloji, astro-nomi vb. birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Günlük yaşamda da mühendislik bölümlerinde, finans

sektörlerinde, bilim uygulamalarında vb. üstel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır.

HATIRLATMA : (Üslü İfadeler)

	$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için		ifadesine “ üslü ifade ” adı verilir.
1)	x	$= x \cdot x \cdot x \dots$	olarak açılır.
		n adet	
2)	$x \neq 0$ olmak üzere	$= 1$	olarak alınır.
3)		$\cdot =$	olarak alınır.
	$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için		

~01A-2~

		) =		olarak alınır.			
			= /				
<u>Soru</u>		+(-)				=	
:	-		+	(-)	+	?	

Soru : . 25 . - . 625 = ?

Soru :

= ?

~01A-5~

Soru :

(/)⁻ + (/) = ?

Soru :

x = 2 ve y = - 3 ise

+ - =

~01A-6~

Soru : , = ?

Soru : , . , - = ?

~01A-7~

Soru : . sayısı için;

A) Sayının sonunda kaç sıfır vardır ?

B) Sayı kaç basamaklıdır ?

Soru :				+	+		
				+	+		= ?

Soru :			+-			
		+			+	= ?
		+ -			-	

~01A-10~

Soru :

=

+

ise

= ?

~01A-11~

Soru : $= m$, $= n$ ise 'in m ve n
türünden sonu-cunu bulunuz.

~01A-12~

Soru: = m ise $\frac{1}{m}$ ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.

~01A-13~

Tanım :

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$f(x) =$ şeklinde tanımlanan
fonksiyona “**üstel fonksiyon**”

adı verilir. $a > 0$ için $f(x) =$

olduğundan

$a > 0$ olur. Üstel fonksiyon $c \in \mathbb{R}$

- c şeklinde de verilebilir.

Soru : e^x , 2^x , $(-2)^x$, $(-e)^x$ fonksiyonla-rından hangileri üstel
fonksiyonun tanım şartını sağlar ?

~01A-14~

Soru: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = -$ fonksiyonu, üstel bir fonksiyon

olduğuna göre k 'nın çözüm aralığı ne olmalıdır ?

~01A-15~

Soru : f :	$\mathbb{R}^+, h : \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+, f(x) = -x^2 + 2$ ve
--------------------------	--------------------------------	------------------------------------

$\mathbb{R}$

$h(x) = - +$

üstel fonksiyonları için $f(2) + h(3) = ?$



Not :

Üstel fonksiyonunun grafiğini çizmek için;

- ☐ **x 'e bazı değerler verilerek fonksiyonun geçtiği noktalar işaret-lenir. x değerlerini kolay almak işimizi kolaylaştırır.**
- ☐ **Üstel fonksiyonun alamayacağı değer için grafiğin **sınırı** belirlenir. Bulunan noktalardan geçen eğri grafiği çizilir.**

Örnek: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, y = f(x) =$ fonksiyonunun

grafığını çiziniz.

~01A-17~

Soru :

$\mathbb{R}^+, y = f(x) =$

fonksiyonunun;

$f : \mathbb{R}$			



A) Grafiğini çiziniz.

B) Fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz. (**Hatırlatma :**

1) Soldan sağa doğru grafik; yükseliş durumunda ise fonksiyon artan, iniş halinde ise fonksiyon azalan idi. **2)**

Grafik üzerinde yatay bir çizgi çizildiğinde çizgi grafiği tek noktada kesiyorsa fonksiyon bire – bir idi. **3)**

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonun grafiği **B** kümesini kapsıyorsa fonksiyon örten idi.)

~01A-20~

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, +\infty), y = f(x$

$) = -1$ fonksiyo-

nunun grafiğini çizip fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

~01A-21~

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, f(x) =$$

fonksiyon artandır. B) $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır.

[illegible]

→
fiğini çizip fonksiyonun artan – azalan durumunu, bire – bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

Soru : $f : \mathbb{R} \longrightarrow (1 , + \infty) , y = f (x)$

=

nunun grafiğini çizip fonksiyonun
artan – azalan durumunu, bire – bir
ve örten olup olmadığını
inceleyiniz.

~01A-25~

12. 1. 2. Logaritma **Fonksiyonu**

Terimler ve Kavramlar: logaritma
fonksiyonu, doğal logaritma

Sembol ve Gösterimler:

$\log x$

$x, \ln x,$

1. **1.2.2.** 10 ve e tabanında logaritma fonksiyonunu tanımlayarak problemler çözer.

e sayısının irrasyonel olduğu vurgulanarak matematikte ve diğer bilim dallarında kullanımından bahsedilir.

1. **1.2.3.** Logaritma fonksiyonunun özelliklerini kullanarak işlemler yapar.

LOGARİTMİK FONKSİYON

a. $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $y = f(x) = (a > 0 \text{ ve } a \neq 1 \text{ olmalı})$ üstel

fonksiyonun tersi olan fonksiyona “ a tabanına göre logaritma

fonk-siyonu ” adı verilir.

- $: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$,

- $(x) =$ x şek

~01A-27~

Kural: $\mathcal{A})$ $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) =$

fonksiyonunda;

□ $a > 0, a \neq 1$ ve $x > 0$ olmalıdır.

$\mathcal{B}$) $y = f(x) =$
fonksiyonunda;

$a. =$


$y = x$


(a tabanı işlemin karşısına
logaritmanın alt tabanı olarak
geçirilir.)

(x yerine y , y yerine x yazılarak ters
fonksiyonu elde edilir.)

[illegible]

**olarak fonksiyonlar
birbirine dönüş-
türülebilir.**

~01A-29~

Soru : Altta verilen ifadelerdeki x değerlerini bulunuz.

A) $\quad - \quad = 7$

B) $\quad +$

~01A-30~

C)

$$25 = 2$$

D)

(5

~01A-31~

E)

$$\mathbf{1 = x}$$

F)

1

~01A-32~

Soru : Altta verilen fonksiyonların tersini bulunuz.

A) $y = f (x) =$ -

~01A-33~

B) $y = f(x) = \quad + \quad + 2$

~01A-34~

C) $y = f (x) = 2 .$

- 4

~01A-35~

$$\text{D) } y = f(x) = (3x - 4)$$

~01A-36~

$$\text{E) } y = f(x) = (x + 2) - 6$$

~01A-37~

Soru : $y = f(x) = (3x - 23)$
ise $f(0) = ?$

~01A-38~

Soru : $y = f(x) = -3 +$
 $-x$) ise -
) = ?

(4
(3

~01A-39~

Soru : $y = f (x) =$ $(4x - 6)$
ise $-$ $(5) = ?$

~01A-40~

Not : $f(x) = k(x)$ logaritmik fonksiyonunun en geniş tanım kümesi istenirse $a > 0$, $a \neq 1$ ve $k(x) > 0$ şartları sağlanmalıdır. Bu şartları sağlayan ortak çözüm kümesi isteneni verir.

Soru : $f(x) = (16 - 2x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-41~

Soru : $f(x) = (+) 10$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-42~

Soru : $f(x) = \left(- \right) (2x + 10)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-43~

Soru : $f(x) = (-5x - 24)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-44~

Soru : $f(x) = (-)(+x - 20)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-45~

Soru: $f(x) = \frac{x}{100 - x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tam sayı vardır ?

~01A-46~

Soru : $f(x) = (- + 4 - 4x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

~01A-47~

Soru : $f(x) = (\quad + 6x + m - 2)$ fonksiyonu her x

reel sayısı için tanımlı ise (**Hatırlatma :** Her $x \in \mathbb{R} \Delta < 0$

olmalıdır.)

m 'nin çözüm aralığı ne olmalıdır ?

için $a + bx + c > 0$ ise $a > 0$ ve

Soru : $f(x) = [\quad + (2m + 2)x + 4]$ fonksiyonu her

i. reel sayısı için tanımlı ise m 'nin
çözüm aralığı ne olmalıdır ?

~01A-49~

Tanım 1: Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna “ onluk logaritma fonksiyonu ” veya “ bayağı logaritma fonksiyonu ” adı verilir.

$\log_{10}(x)$ veya $\log(x)$ olarak gösterilir. İkinci göste-

rimde 10 gizli tabandır.

Depremlerin şiddetini (Richter ölçeği) ölçmekte onluk logaritma fonksiyonundan yararlanılır.

$$y = \log x \Leftrightarrow$$

$$10^y = x \text{ olur.}$$

Tanım 2: Tabanı e Euler sabiti ($e = 2,71 \dots$) irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna “ doğal logaritma fonksiyonu ” adı verilir.

$\ln(x)$ veya $\ln(x)$ olarak gösterilir. İkinci gösterimde

e gizli tabandır.

a. sayısı matematik, kimya ve fizik hesaplamalarında kullanılmaktadır.

$$y = \ln x \Leftrightarrow$$

$$= x \text{ olur.}$$

~01A-50~

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Kural 1:
olarak alınır.

$$1 = 0,$$

$$a = 1$$

Soru : $5 + \ln 1 + 3 \log 10 = ?$

Soru					

[illegible]

~01A-51~

Kural 2: $\mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}$

olarak alınır. Taban kısmın dı-

şındaki terimin kuvveti logaritmanın başına çarpan olarak alınır.

() $\neq m$. **b olduğuna dikkat edilmelidir.**

Soru : $27 + \log 100 = ?$

Soru :

32 +

= ?

~01A-52~

Soru :

25 +

+ log

= ?

~01A-53~

Soru : $(4) - \ln + 1 = ?$

~01A-54~

Soru : $(3 \quad) + \log 0,001 + ($

~01A-55~

Kural 3:	= . b	olarak alınır.	Taban kuvvetinin

**çarpmaya göre tersi logaritmanın
başına çarpan olarak alınır.**

= m .		.b olarak alınır.	
Soru			
:			
	27 - 2 = ?		

Soru :

~01A-56~

-

= ?

Soru :

?

(2) +

=

~01A-57~

~01A-58~

Soru :

= ?

625 +

0,0001

~01A-59~

Soru : $5 = x$ ise 25 ifadesinin
sonucunu x türünden bulunuz.

~01A-60~

Soru : $16 = x$ ise 8 ifadesinin sonucunu x türünden bulunuz.

Soru : $81 = x$ ise 27 ifadesinin sonucunu x türünden bulunuz.

~01A-62~

Kural 4:

$$(x \cdot y) =$$

$$x +$$

Soru :

$$8 + \log 125 = ?$$

Soru :

$$\begin{aligned} 3 + & \quad 20 + \\ - & \quad = ? \end{aligned}$$

~01A-63~

Soru :

$\ln x + 2 \ln y - 3 \ln z$
işlemini tek logaritma

		ifadesine	
çeviriniz.			

~01A-64~

Soru : $\log 2 \cong 0,301$ değeri için $\log 40$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

~01A-65~

Soru : $\log 2 = k$, $\log 3 = m$ ise $\log$
432 ifadesinin sonucunu k ve m
türünden bulunuz.

Soru : $3 = m$ ve $5 = n$ ise 1125
ifadesinin sonu-cunu m ve n
türünden bulunuz.

~01A-67~

Soru : $\log 2 = a$ ve $\log 7 = b$ ise $\log 0,028$ ifadesinin sonucunu a ve b türünden bulunuz.

~01A-68~

Soru : $\log a + \log b = \log (a + b)$

**ise a 'nın sonucunu b tü-ründen
bulunuz.**

~01A-69~

Kural													
5:		=											
		x											
		-											
		y											
Soru :		log 600 - log 6 = ?											

**olarak
alınır.**

Soru :

= ?

8 -

14 +

56

Soru :

27 -

12 +

36

~01A-70~

~01A-71~

Soru : $\log 3 - \log 2 + 1$ işlemini tek
logaritma ifadesine çeviri-niz. (
Böyle durumlarda işlemdeki sayıyı
verilen logaritma ifade-sine uygun
olacak şekilde dönüşüm yapılır.)

~01A-72~

Soru : $5 + 2 - 2$ işlemini tek
logaritma ifadesine çevi-riniz.

~01A-73~

Soru : $\log 2 \cong 0,301$ değeri için $\log 0,08$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

~01A-74~

Soru : 	$5 = k$ ise			ifadesinin sonucunu k türün-	
den bulunuz.					

~01A-75~

Soru : $\log 2 = k$, $\log 3 =$
 m ve $\log 7 = n$ ise

ifade-

sinin sonucunu k , m ve n türünden
bulunuz.

~01A-76~

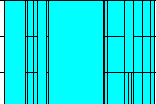
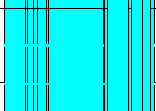
<i>Soru</i>	$\log 2 = k$ ve $\log 5 = m$ ise	ifadesinin
--------------------	---	-------------------

sonucunu k ve m türünden bulunuz.

Soru : $\log 5 = a$ ise $\log 20$ ifadesinin sonucunu a türünden bulunuz. (20 'nin çarpanlarından sonuca ulaşamaz. 20 'yi veren ve verilen sayıyı kullanabileceğimiz bir bölme işlemini bulmalıyız.)

~01A-78~

Soru : $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ ise $\log 75$
ifadesinin sonucunu a ve b türünden
bulunuz.

Kural 6:		olarak taban değiştirmesi yapılabilir.
Soru :		= ?

Soru ∴								
			-		-		= ?	

Soru :

	1	= ?	
1 –	1		
	1 + log₃ 2		

~01A-82~

Soru : $3 = m$ ise 2 ifadesinin
sonucunu m türünden bulunuz.

~01A-83~

Soru : $2 = m$ ise 9 ifadesinin sonucunu m türünden bulunuz.

~01A-84~

Soru : $21 = k$ ise 7 ifadesinin
sonucunu k türünden bulunuz.

~01A-85~

Soru : $2 = a$, $3 = b$ ise 3 ifadesinin sonucunu a ve b türünden bulunuz.

~01A-86~

Kural 7:	=	olarak taban değıştirmesi yapılabilir.
Soru :	+ ?	

~01A-87~

<i>Soru :</i>						
			+		= ?	

~01A-88~

Soru ⋮								
			+		-		= ?	

~01A-89~

Soru : $\log 3 = k$, $\log 2 = m$ ise 2
ifadesinin sonucunu k ve m
türünden bulunuz.

~01A-90~

Soru : $5 = a$ ise 75 ifadesinin
sonucunu a türünden bulunuz.

~01A-91~

Soru : = a ise 21 ifadesinin
sonucunu a türünden
bulunuz.

~01A-92~

Soru : $y = t$ ise $(.) (.)$ ifadesinin sonucunu t türünden bulunuz.

~01A-93~

Soru : $7 = x$ ve $3 = y$ ise 63 ifadesinin sonucu-nu x ve y türünden bulunuz.

~01A-94~

Soru : $\log 50 = k$ ise $5 = t$ ise t 'nin sonucunu k türünden bulunuz.

~01A-95~

Kural 8:												
	.. olarak alınır.											
Soru :	..= ?											

~01A-96~

Soru : $\log 2$. $\ln 100 = ?$

~01A-97~

Soru :

?

.

.

=

Soru :

.

~01A-98~

= ?

~01A-99~

Soru : $x = y$ ise $\log 12$ ifadesinin sonucunu x ve y türünden bulunuz.

~01A-100~

Soru : $= k$ ve $= m$ ise ifadesinin
sonu-cunu k ve m türünden
bulunuz.

~01A-101~

Soru : $= k$, $= m$ ve $= n$ ise ifa-desinin sonucunu k , m ve n türünden bulunuz.

~01A-102~

Kural
9:

= b olarak alınır. Kuralın
sağlanması için

üstel fonksiyon ile logaritmanın

tabanı aynı olmalıdır.

<i>Soru :</i>			+		-		= ?	

<i>Soru :</i>				= ?	

~01A-103~

Soru :

Soru :

= ?

= ?

Soru : / = ?

~01A-105~

Soru :

= ?

~01A-106~

Soru : + = ?

~01A-107~

<u>Kural 10:</u>			
logaritmadaki sayı			

=		olarak alınır. Üstelin tabanı ile	
		yer değiştirebilir.	

Soru : - = ?

			+ .		
Soru :				= ?	

Kural		
11:		(Basamak Sayısı)
A)	$\log x$	$= a , \dots$ ise x sayısının basamak sayısı a 'nın 1

fazlasına eşittir.

$$\log 10 = 1$$

}

$1 < \log x < 2$ ise $10 < x < 100$ olmalıdır.

$$\log 100 = 2$$

$\log x = 3 , \dots$ ise;

$$\log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \\ \log 100000 = 4$$



olduğundan $1000 < x < 10000$ yani dört basamaklı olmalıdır.

B) sayısının basamak sayısını bulmak için sayının logaritması alınır. İşlem sonucunda tam kısmın 1 fazlası basamak sayısını verir.

~01A-109~

Soru : $\log 3 \cong 0,477$ ise

sayısı

kaç basamaklıdır ?

~01A-110~

Soru : $\log 2 \cong 0,301$ ise

kaç basamaklıdır ?

sayısı

~01A-111~

Soru : $\log 2 \cong 0,301$ ve $\log 3 \cong 0,477$ ise ve sayıları kaç basamaklıdır ?

~01A-112~

Soru :

$\log 2 \cong 0,301$ ise

sayısı kaç basamaklıdır ?

~01A-114~

Soru : $x = \log 0,000005002$ sayısı
hangi aralıkta olmalıdır ?

(Logaritmanın sonucu bulunur ve
küsurlu kısmın çözüm aralığı
bulunur.)

~01A-115~

Soru : $x = \log 0,0000000962$ sayısı
hangi aralıkta olmalıdır ?

Soru :

Kural 12: (Arada Olma)

x =

b olsun

**nı bulmak için verilen logaritmanın
sol ve sağından en yakın sonucu
bilinen iki komşu logaritması alınır.**

$$x = 3 \text{ ve } y = 10$$

**sayılarının çözüm aralığını bulup
sayıları karşılaştırınız.**

~01A-117~

Soru : $x = 52$ ve $y = 33$ sayılarının
çözüm aralığını bulup sayıları
karşılaştırınız.

~01A-118~

Soru : $x = 9$, $y = 11$ ve $z = 4$

**sayılarının çözüm aralığını bulup
sayıları karşılaştırınız.**

~01A-119~

Soru : $x = \ln 5$ ve $y = 18$ sayılarının
çözüm aralığını bulup sayıları
karşılaştırınız.

~01A-120~

<i>Soru :</i>		x =	10 ve y =	

bulup sayıları karşılaştırınız.

1. sayılarının çözüm aralığını

~01A-121~

Soru : **x =** **5 , y =** **18 ve**
z =

**özüm aralığını bulup sayıları
karşılaştırmınız.**

1. sayılarının

~01A-122~

Soru : $x =$ 0,02 sayısının
çözüm aralığını bulunuz.

~01A-123~

Soru : $x =$ 0,125 sayısının
çözüm aralığını bulunuz.

~01A-124~

Soru :

. ise $a \cdot b = ?$

$$\log 650 \cong a, \dots \text{ve}$$

$$23 \cong b, \dots$$

~01A-125~

Soru :

$\log 0,00222 \cong a, \dots$ ve

$65 \cong b, \dots$ ise

~01A-126~